MCMCによるカオス力学系の軌道のサンプリング

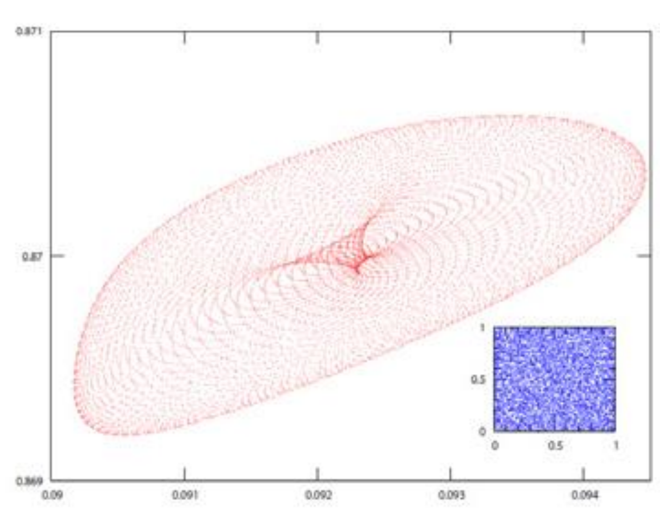
伊庭 幸人 モデリング研究系 教授

マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC)はベイズ統計や統計物理の文脈で理解されがちであるが高次元確率分布からの汎用のサンプリング手法であり，データサイエンス以外の問題にも利用できる．具体例としては，制約条件をみたす離散構造（たとえば魔方陣）を多数生成して個数を推定する，多変数の非線形方程式の解を多数生成する，レアイベントの確率を求める，などがある

ここでは「カオス力学系の生成する乱雑な構造（カオスの海）の中から，規則性の高い構造をサンプリングする」という問題を紹介する．また，少し変わった応用としてタイムトラベルでの「親殺しのパラドックス」への応用の可能性を論じる

例1） 安定性の高い軌道に導く初期値を
MCMCでサンプリング➔ 確率まで計算

Kitajima and Iba (2011): マルチカノニカルMCMC
Geiger and Dellago (2010): 普通のMCMC
Leitao et al (2013): その後精力的に続報

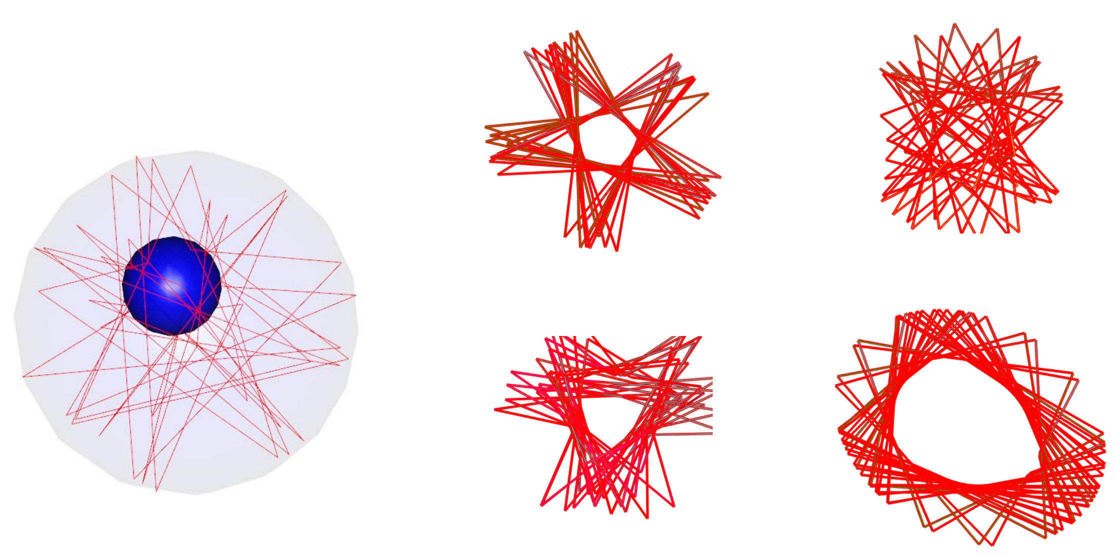


$$u_{n+1} = u_n - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi v_n) + \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi(v_n + y_n))$$
$$v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi y_n) + \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi(v_n + y_n))$$
$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}$$

例2） 不安定周期解のMCMCサンプリング
Pratt (1986) : Simulated Annealing
Sasa and Hayashi (2006): レプリカ交換MCMC

$$U(x) = \Sigma_{i=0}^{T-1} |x_{t+1} - F(x_t)|^2 \; ; \; x_T = x\_0$$

3次元ビリヤード（2重の球殻の中をボールが反射）



周期71の軌道の例

マルチカノニカルMCMC

$$U(x) = \log\left|x_1 - F^{(T)}(x_1)\right|$$

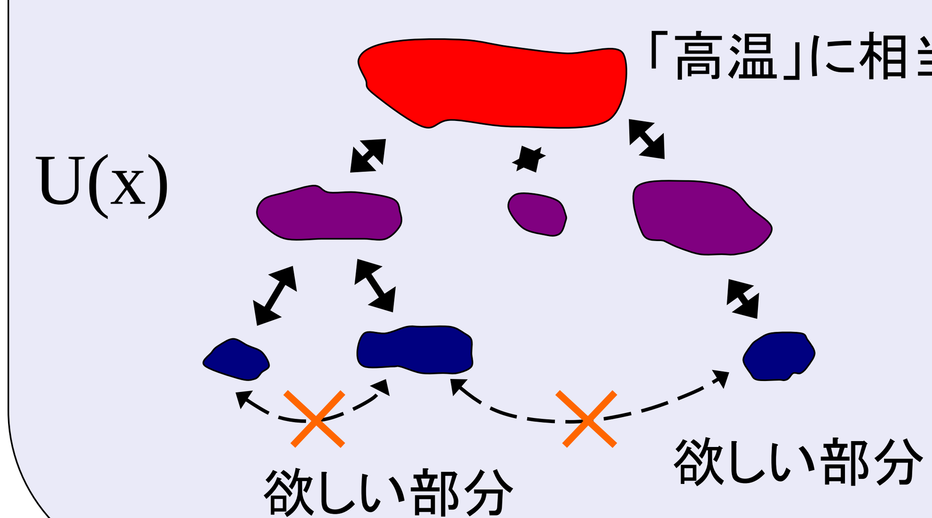
T=71； 71 回反射して元に戻る解をサンプリング

マルチカノニカルMCMC
(Berg 1991,1992)

状態：x，注目する統計量：U(x)

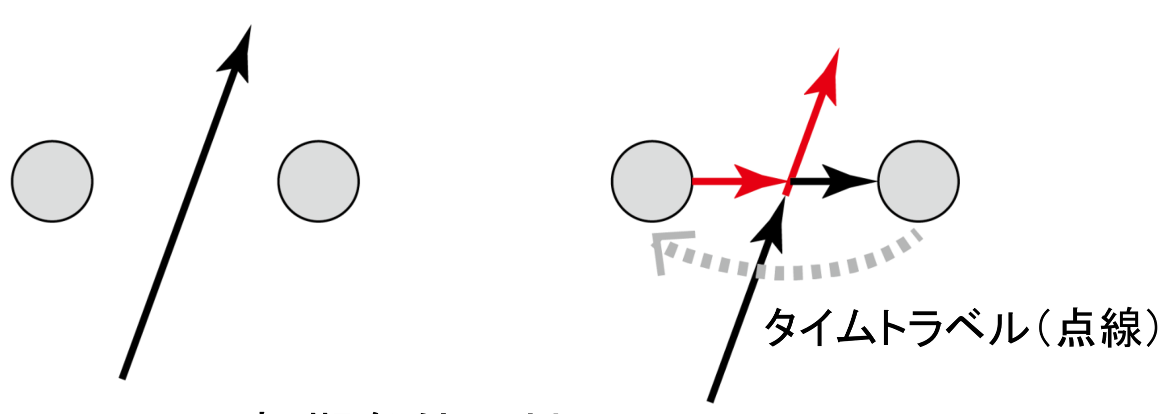
f(U)の関数形を逐次的に学習
⇔ f(U(x))を重みとしてMCMC

Uの値の広い区間をほぼ一様に生成するようなxのサンプリングを実現
➔局所的な解にトラップされにくい
➔正しい確率でサンプリングできる（≠最適化）



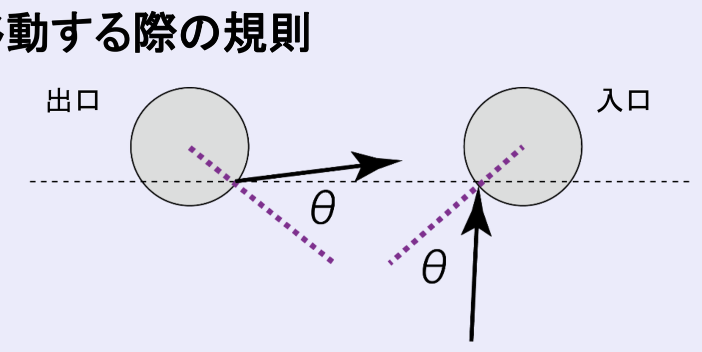
ワームホールを利用したタイムマシンの研究
Closed Timelike Curve (CTC) の存在下での古典力学

Kip Thorneたちの論文（Phys Rev D, 1991)
ビリヤード・ボールのタイムトラベル
➔ 「親殺しのパラドックス」を調べる



同一初期条件に対して
自己無矛盾な解が複数ある例

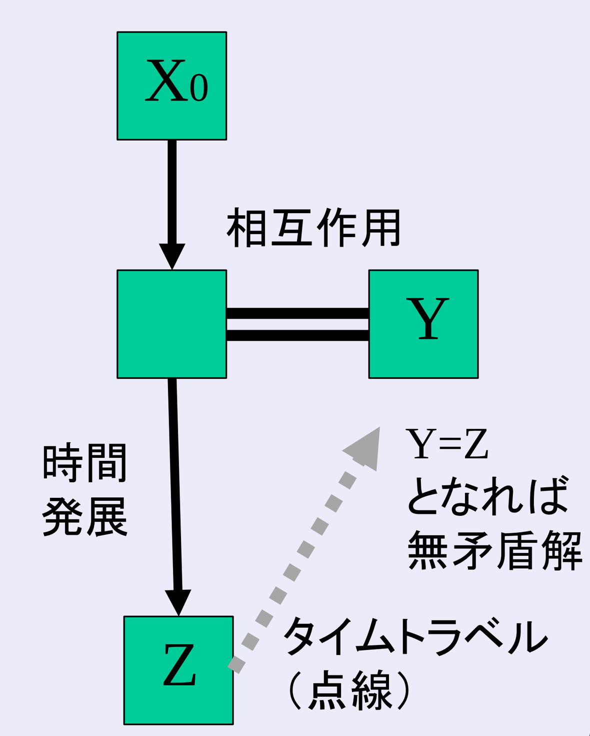
ワームホールの入口・出口を
移動する際の規則



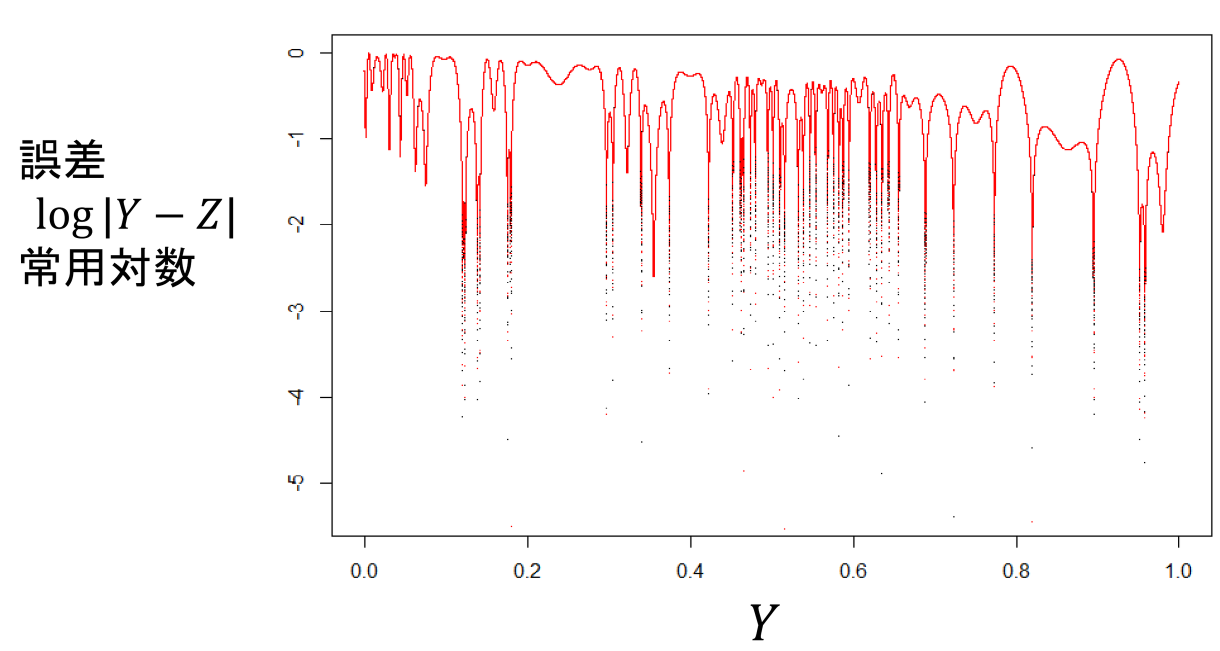
「自己無矛盾な解の探索」は
「周期解の探索」に似ている

➔MCMCによる手法が使える？
しかし弾性球の例は簡単ではない
もうちょっと簡単な例はないか

カオス写像がタイムトラベルして自分自身と相互作用



ロジスティック写像でYの値について直接探索



a=3.89, X0=0.456; 20ステップ目から5ステップ目にタイムトラベル; 「相互作用」は加重平均1%混入

【問題点】

- ワームホール自体が軌道を発散させる効果がある
- 一般にはワームホール中の物理が必要
  ➔先行研究が弾性球の衝突を扱った理由

- CTCの実在：ホーキングは否定的
  真空揺らぎの不安定化
- 最近，CTCは量子計算関係でなぜか話題になっている

リーディングDAT講座 2018 年度は L-A（前期）, L-B1, L-B2，L-S（後期）を予定しています
「岩波データサイエンス１～６」「ベイズモデリングの世界」 好評発売中です
「計算統計II」の伊庭担当部分の改訂中です．本年度中に刊行予定