2018年6月15日 統計数理研究所 オープンハウス

拡散過程の積分観測モデルに対する統計推定理論

荻原 哲平　　数理・推論研究系 助教

【拡散過程の積分観測モデル】

拡散過程のパラメトリック・モデルに対する統計推測問題はこれまでに多く研究されてきた. 本研究では, 拡散過程自体を観測せず, その積分値を高頻度観測する場合の統計推定の漸近理論を紹介する. このようなモデルは株価モデルとして重要な確率ボラティリティ・モデルや, 溶媒中の微粒子運動の方程式であるLangevin方程式の統計推測へ応用される.

積分観測モデル

p次元確率過程$(X,Y)=\left((X_t,Y_t)\right)_{0\le t\le 1}$が以下の方程式を満たすとする:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s,Y_s)ds + \int_0^t a(s,X_s,Y_s,\sigma_*)dW_s\,,$$
$$\mathrm{Y}_t = \int_0^t X_s ds\,.$$

$(W_t)_{0\le t\le 1}$：多次元標準ブラウン運動,　σ_*：未知パラメータ

観測が$\left(\mathrm{Y}_{k/n}\right)_{k=0}^n$で与えられた時に$d$次元未知パラメータ$\sigma_*$を推定する問題を考える.

【Langevin方程式】

積分観測モデルの応用例として, 溶媒中の微粒子運動の方程式である以下のLangevin方程式が挙げられる:

$$mX_t = -\int_0^t (\nabla q(Y_s) + \gamma X_s)ds + \sigma W_t,$$
$$\mathrm{Y}_t = \int_0^t X_s ds\,.$$

ただしX_t, Y_tは粒子の速度と座標を表し, mは質量, qはポテンシャル, γは抵抗係数, W_tはブラウン運動を表す.

- ➢ <u>拡散過程の積分観測モデルにより, 粒子の位置座標の離散データからLangevin方程式のパラメータσが推定可能になる</u>

【確率ボラティリティ・モデル】

$$X_t = \int_0^t \sqrt{V_s}dW_s^1\,,$$
$$V_t = \int_0^t (\alpha - \beta V_s)\,ds + \sigma\int_0^t \sqrt{V_s}dW_s^2\,.$$

このモデルは確率過程V_tが株価過程X_tの変動の大きさ(ボラティリティ)を定めており, それがランダムに変化するのでこのモデルは確率ボラティリティ・モデル(Heston model)と呼ばれる.

観測はXの離散観測: $\{X_{k/n}\}_{k=0}^n$で与えられ, 確率ボラティリティ・モデルのパラメータを係数に含むV_tが観測されないため, 統計推定が困難になる.

しかし,

$$\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\left(X_{k/n} - X_{(k-1)/n}\right)^2 \approx \int_{k_1/n}^{k_2/n} V_t dt$$

とV_tの積分値を観測変数で近似することができるので近似的にパラメータ推定が可能になる.

【最尤型推定量の構築】

拡散過程X_tの方程式の係数a,bが一般の関数である時, 観測$\left(Y_{k/n}\right)_{k=0}^n$の確率密度関数の計算が困難であるため, 最尤推定量の計算も困難となる. ここでは尤度関数の近似計算を行い, パラメータの最尤型推定量を構築する.

$0<\delta<1/4$に対して, $\mathrm{L}=\left[n^{1-\delta}\right], s_m = m/L\ (0\le m\le L)$とおく. Y_tの観測区間[0,1]をdisjointな区間$\{[s_{m-1},s_m)\}_{m=1}^L$に分けて, それぞれの区間で尤度関数の近似関数を構築する.

$t_k = k/n\,, p_m = \max\{k; t_k < s_{m-1}\}$と定め, a^jを拡散係数aのj番目の行ベクトルとする. $[s_{m-1},s_m)$上において$a(s,X_s,Y_s,\sigma)$を

$$\tilde{a}_m^j(\sigma) = a^j\left(s_{m-1}, n\left(Y_{t_{p_m}} - Y_{t_{p_{m-1}}}\right), Y_{t_{p_m}}, \sigma\right)$$

と近似する.

この時, $U_m = \left(\mathrm{Y}_{t_l}^j - 2\mathrm{Y}_{t_{l-1}}^j + \mathrm{Y}_{t_{l-2}}^j\right)_{l;t_l\in[s_{m-1},s_m)}$に対する疑似対数尤度関数$H_n(\sigma)$を

$$H_n(\sigma) = -\frac{1}{2}\sum_{m=2}^L \left(U_m^\top S_m^{-1}(\sigma)U_m + \log\det S_m(\sigma)\right))$$

で定める. ただし, $K_m = \left(K_{m,i,j}\right)_{i,j}$,

$$K_{m,i,j} = n^{-3}\left((2/3)\delta_{i,j} + (1/6)\delta_{i,j-1} + (1/6)\delta_{i-1,j}\right),$$

$$S_m(\sigma) = \begin{pmatrix} |\tilde{a}_m^1|^2(\sigma)K_m & \cdots & \tilde{a}_m^1\cdot\tilde{a}_m^p(\sigma)K_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_m^p\cdot\tilde{a}_m^1(\sigma)K_m & \cdots & \left|\tilde{a}_m^p\right|^2(\sigma)K_m \end{pmatrix}.$$

すると最尤型推定量$\hat{\sigma}_n$を

$$\hat{\sigma}_n = \mathrm{argmax}_\sigma H_n(\sigma)$$

と定めることができる.

【最尤型推定量の漸近的性質】

係数aのなめらかさや非退化性等の一定の条件の下,

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*) \to \Gamma^{-1/2}N.$$

ただし, Γは確率行列で, $\mathrm{N}\sim N(0,I_d)\perp\Gamma$.

【局所漸近混合正規性(LAMN)】

さらにこの統計モデルに対して重要な性質であるLAMNが成立する. LAMNは推定量の漸近的最適性を論じる上で重要な役割を果たす.

<u>Definition (LAMN)</u>

可測空間(Z_n,A_n)上の確率測度の族$\{P_{\theta,n}\}_\theta$が$\theta=\theta_0$でLAMNを満たすとは, $\exists\Gamma_n,\exists\Gamma: d\times d$正定値確率行列, $\exists N_n,\exists N: d$次元確率ベクトル s.t.

$$\log\frac{dP_{\theta_0+u/\sqrt{n},n}}{dP_{\theta_0,n}} - \left(u^\top\sqrt{\Gamma_n}N_n - \frac{1}{2}u^\top\Gamma_n u\right) \to 0$$

in $\mathrm{P}_{\theta_0,n}$-probability, $N\sim N(0,I_d), N\perp\Gamma$ and

$$\mathcal{L}\left((N_n,\Gamma_n)\middle|P_{\theta_0,n}\right) \to \mathcal{L}\left((N,\Gamma)\right)$$

for any $\mathrm{u}\in\mathbb{R}^d$ を満たすことである.

Jeganathan (1983)は統計モデルがLAMNを満たす時, 任意の推定量V_nに対してminimax inequality:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathrm{liminf}_{\mathrm{n}\to\infty}\sup_{|\mathrm{u}|\le\alpha}\mathrm{E}_{\theta_0+u/\sqrt{n}}\left[\left|\sqrt{n}(V_n-\theta_0-u/\sqrt{n})\right|^2\right] \ge E\left[\left|\Gamma^{-1/2}N\right|^2\right]$$

を示した. ただし, E_θは$\mathrm{P}_{\theta,\mathrm{n}}$に関する期待値を表す.

この不等式は推定量の漸近分散の下界を与えており, 上の不等式で統合を達成する推定量は漸近分散が最小になる.