$\Lambda = \delta_1$-Fleming-Viot過程の性質について

間野 修平　数理・推論研究系 准教授

0　本ポスターの内容

分割の要素（ブロックとよびます）が合体することで発展する分割の確率過程にΛ-coalescentとよばれるモデルがあります．合体のレートは合体するブロックの数に依存し，$\Lambda(dx), x \in [0,1]$とかかれる測度に支配されます．$\Lambda = \delta_0$のときはKingman's coalescentとよばれ，必ず2つのブロックが合体します．陽な結果を得ることができるので，その性質は良く知られています．双対をなすFleming-Viot過程とよばれる測度値拡散過程についても良く調べられていて，定常分布であるPoisson-Dirichlet分布は良く知られています．他に解析の容易なモデルとして，$\Lambda = \delta_1$に対応する，すべてのブロックが一度に合体するものを考えることができます．本ポスターは，その双対をなす$\Lambda = \delta_1$-Fleming-Viot過程の性質，特に推移確率密度について紹介しています．本内容は，Oxford大学統計学科のRobert C. Griffiths名誉教授との共同研究に基づくものです．

1　Kingman's coalescent

Kingman's coalescent (1982)は自然数の分割$\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$に値をとる確率過程$(\Pi_n(t); t \geq 0)$で，次の規則に従います．

- $\Pi_n(0) = \{\{1\},\{2\},...,\{n\}\}$.
- 状態$\pi = \{A_1,...,A_b\}$にあるとき，ブロックA_iとA_jが合体してできる分割をπ_{ij}とすると，$\pi_{ij}, i \neq j, i, j = 1,...,b$にレート1で推移．

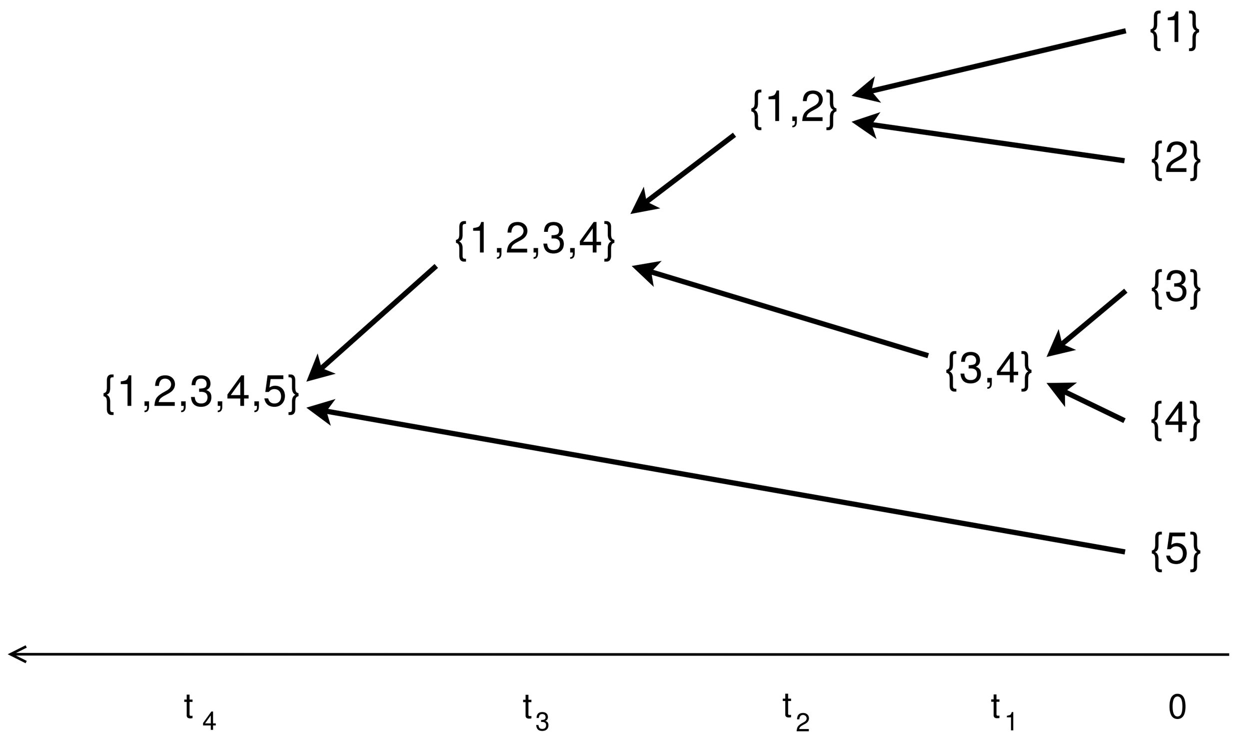

図1．$(\Pi_5(t); t \geq 0)$の標本．

さらにブロックをレート$\theta/2$のPoisson過程でマークすると，マークが定める同値関係により得られる分割$\Pi_n^{\theta}(\infty)$はEwens分割(1972) に従います．Ewens分割はノンパラメトリック・ベイズにおいて良く使われるDirichlet過程からの標本で，その構成は中華料理店過程として知られています．

2　Fleming-Viot過程

Ewens分割は，Kingman's coalescentの双対をなすFleming-Viot過程とよばれる測度値拡散過程の定常分布であるPoisson-Dirichlet分布（Dirichlet分布の「無限次元版」）からの標本として導出されました．Fleming-Viot過程は確率測度$\mathcal{P}(E)$, $E = [0,1]$に値をとり，生成作用素は$\phi(\mu) = F(\langle f_1, \mu\rangle, ..., \langle f_k, \mu\rangle)$について

$$L\phi(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}(\langle f_i f_j, \mu\rangle - \langle f_i, \mu\rangle\langle f_j, \mu\rangle)\phi_{,ij}(\mu) + \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{k}\langle Bf_i, \mu\rangle\phi_{,i}(\mu)$$

で与えられます．浮動項が$Bf_i(x) = \int_E (f_i(y) - f_i(x))dy$のときに定常分布としてPoisson-Dirichlet分布をもちますが，ここでは陽な表示に興味があるため，最も単純な2次元の分布を考えるために，$f_1 = I_A$，$Bf_1(x) = 1 - 2f_1(x)$ とします．すると，$\mu(A) = x$について

$$L = \frac{x(1-x)}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\theta}{2}(1-2x)\frac{d}{dx}$$

となります．定常分布πはベータ分布$Beta(\theta,\theta)$で，推移確率密度は

$$f(x,y;t) = \pi(y)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n(n-1+2\theta)}{2}t} P_n^{(\theta,\theta)}(x) P_n^{(\theta,\theta)}(y)\right\},$$

のような表示をもちます．ここで，$P_n^{(\theta,\theta)}(x)$は$Beta(\theta,\theta)$を重みとする直交多項式（Jacobi多項式）で，$\mathbb{E}_\pi[P_m^{(\theta,\theta)}(X)P_n^{(\theta,\theta)}(X)] = \delta_{m,n}$を満たします．

3　Λ-coalescentとΛ-Fleming-Viot過程

Λ-coalescent (Pitman 1999; Sagitov 1999)は，Kingman's coalescent における推移の規則を次のように変更したものです．

- 状態$\pi = \{A_1,...,A_b\}$にあるとき，k個のブロックがレート

$$\lambda_{b,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{b-k}\Lambda(dx), \qquad 2 \leq k \leq b$$

で合体．交換可能性より$\lambda_{b,k} = \lambda_{b+1,k} + \lambda_{b+1,k+1}$.

例

- $\Lambda = \delta_0 \cdots$ Kingman's coalescent.
- $\Lambda(dx) \propto x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}dx, \alpha \in (0,2) \cdots$ Beta coalescent.（$\alpha = 1$はBolthausen-Sznitman's coalescentとよばれる）

Λ-coalescentの双対をなすΛ-Fleming-Viot過程の生成作用素は跳躍を伴い，2次元の分布については，

$$\begin{aligned} Lf &= \Lambda(\{0\})\frac{x(1-x)}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\theta}{2}(1-2x)\frac{df}{dx} \\ &+ \int_{(0,1]}(xf((1-r)x) + r) + (1-x)f((1-r)x) - f(x))\frac{\Lambda(dr)}{r^2} \end{aligned}$$

となります．

4　$\Lambda = \delta_1$-Fleming-Viot過程

$\Lambda = \delta_1$-coalescentは$\lambda_{b,b} = 1$という単純なモデルです．その双対をなす純粋跳躍過程である$\Lambda = \delta_1$-Fleming-Viot過程の性質を調べました．ここでは推移確率密度に関する結果のみを紹介します．定常分布は

$$\pi(x) = \frac{2^{\frac{2}{\theta}}}{\theta}|x - 1/2|^{\frac{2}{\theta}-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{2}$$

で，推移確率密度は

$$f(x,y;t) = \pi(y)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} P_n(x) Q_n(y)\right\}$$

のような一般化多項式による表示をもちます．ここで，$\lambda_1 = \theta/2$,

$$P_1(x) = x - 1/2, \qquad Q_1(x) = (x-1/2)^{-1},$$

さらに，$j = 2,3,...$について，$\lambda_j = 1 + j\theta/2$,

$$P_j(x) = (x-1/2)^j + \frac{((-1)^j - 1)x - 1}{2^j + \theta(j-1)2^{j-1}},$$
$$\pi(x)Q_j(x) = \delta^{(j)}(x - 1/2).$$

ただし，$\delta^{(j)}(x)$は超函数で，$\delta^{(j)}(x) = [(2\pi\sqrt{-1}x^{j+1})^{-1}]$．これらは$\pi(x)$を重みとする双直交性$\mathbb{E}_\pi[P_m(X)Q_n(X)] = \delta_{m,n}$を満たします．