時間逆転シミュレーション –台風モデルとローレンツ96モデルでの実装

高柳 慎一　　総合研究大学院大学　統計科学専攻　5年一貫制博士課程4年

研究目標

シナリオを生成する確率モデルが与えられている条件の下、
■レア事象を生起するシナリオを効率よく生成
■レア事象の生起確率をバイアスなく算出
する手法を開発すること。特に初期分布が大きく、ターゲットとなる領域が小さいような問題を対象とする。数理的な定式化として“状態空間上における、ある領域に入る確率”を計算する問題として定式化する
応用例：確率台風モデル➔ 東京に台風が直撃

提案手法

「時間を逆転させたシミュレーション（後進シミュレーション）」を用いることで、確率を算出。計算したい領域の体積が初期分布に比べて大きいほど、ターゲットへの到達頻度が多くなるため、通常のモンテカルロ・シミュレーション（前進シミュレーション）に比べて効率的な計算手法となることが期待される
例：　東京から出発して逆に経路を辿り、フィリピン海で消滅

時間逆転シミュレーションの定式化

仮定：確率過程 $X=\{X_t;t\in\{1,\cdots,T\}\}$ の、時間順方向（前進）のダイナミクスが、下記の1次のマルコフ連鎖で与えられる

$$X_{t+1}=X_t+f_t\left(X_t\right)dt+\sigma_t dZ_t$$

この時、ある状態空間上の領域Aに時点Tで入る確率は

$$P(X_T\in A)=\mathbb{E}\left[1_{X_T\in A}\right]=\int\cdots\int 1_{x_T\in A}\left\{\prod_{t=0}^{T-1}p\left(x_{t+1}|x_t\right)\right\}p(x_0)dx_{0:T}$$

推移確率 $p\left(x_{t+1}|x_t\right)$ 、初期分布 $p(x_0)$ 、標準ブラウン運動 Z_t

と計算される
時間逆転シミュレーションの定式化のため、系のダイナミクスを**近似**する一方、状態の**遷移確率が整合的になるよう修正**

$$X_{t+1}=X_t+f_t\underline{\left(X_{t+1}\right)}dt+\sigma_t dZ_t$$

$$P(X_T\in A)=\int\cdots\int\frac{1_{x_T\in A}}{A}\left\{\prod_{t=0}^{T-1}\underline{q\left(x_{t+1}\to x_t\right)W_t}\right\}p(x_0)Adx_{0:T}$$

$$W_t=\frac{p\left(x_{t+1}|x_t\right)}{q\left(x_{t+1}\to x_t\right)}$$

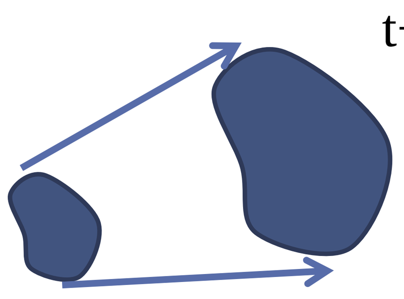
近似によるズレは、重み W_t により調整され、確率自身は前進シミュレーションと同じ値となる。後進シミュレーションは、$1_{x_T\in A}/A$ を初期分布とみなし、逆方向の推移確率 $q\left(x_{t+1}\to x_t\right)$ に従って系を時間発展させることで実行される

重みの直感的解釈、及び分裂・消滅による補正

・重み W_t は、物理的な解釈として、状態の遷移に伴う状態空間上の体積増加・減少の補正と解釈できる
・重み W_t は時点を追うごとにその分散が大きくなる傾向があるため、逐次モンテカルロ法（粒子モンテカルロ法）に倣い、粒子の分裂・消滅を導入することで、必要に応じてウェイトの補正を実施

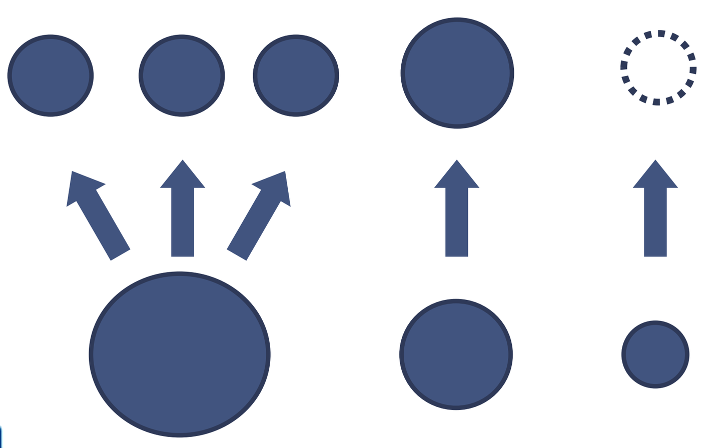
体積増加・縮小因子としての重み W_t

※前進シミュレーションにおいては、連続時間極限で、単位時間あたり、体積が $1/W_t$ 倍される



$$W_t=\exp\left\{-\mathrm{div}f(x_t)dt+O(dt)\right\}$$

重みに応じた粒子の分裂・消滅



※●のサイズが重みを表す

確率台風モデル

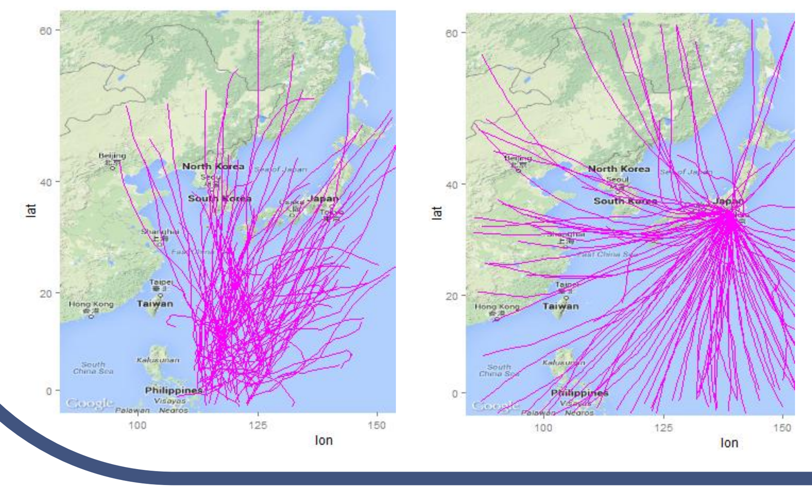
台風の位置と速度が下記の方程式系に従うと仮定した台風モデル

$$x_{t+1}=x_t+v_t$$
$$v_{t+1}=V\left(x_{t+1}\right)+w\left(v_t-V\left(x_t\right)\right)+e_t \qquad v_t=\left(v_{\phi,t},v_{\lambda,t}\right)$$
$$V\left(x_t\right)=a_0+a_1x_{\phi,t}+a_2\sin x_{\lambda,t}+a_3\sin^2 x_{\lambda,t} \qquad x_t=\left(x_{\phi,t},x_{\lambda,t}\right)$$

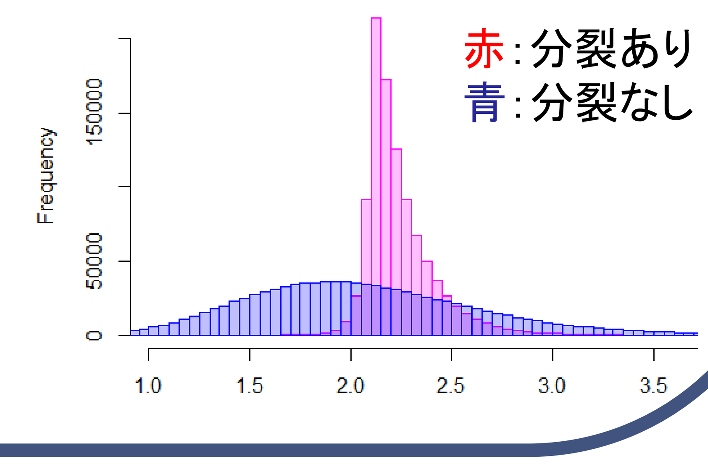
初期：フィリピン海沖【北緯120度東経5度±9度の範囲】
目標：東京【北緯139度東経35度±0.5度の範囲】
最終ステップ(16)で目標にいる確率を計算（ 100万パス、±は標準誤差）
・前進シミュレーション：0.0634%±0.00252%
・後進シミュレーション(ウェイトあり・分裂なし)：0.0657%±0.00094%
・後進シミュレーション(ウェイトあり・分裂あり)：0.0671%±0.00089%
・後進シミュレーション(ウェイトなし・分裂なし)：0.0081%±0.00010%

※分裂は15ステップ目で実施

モンテカルロパス例（左：前進・右：後進）



最終ステップでのウェイト分布(log)

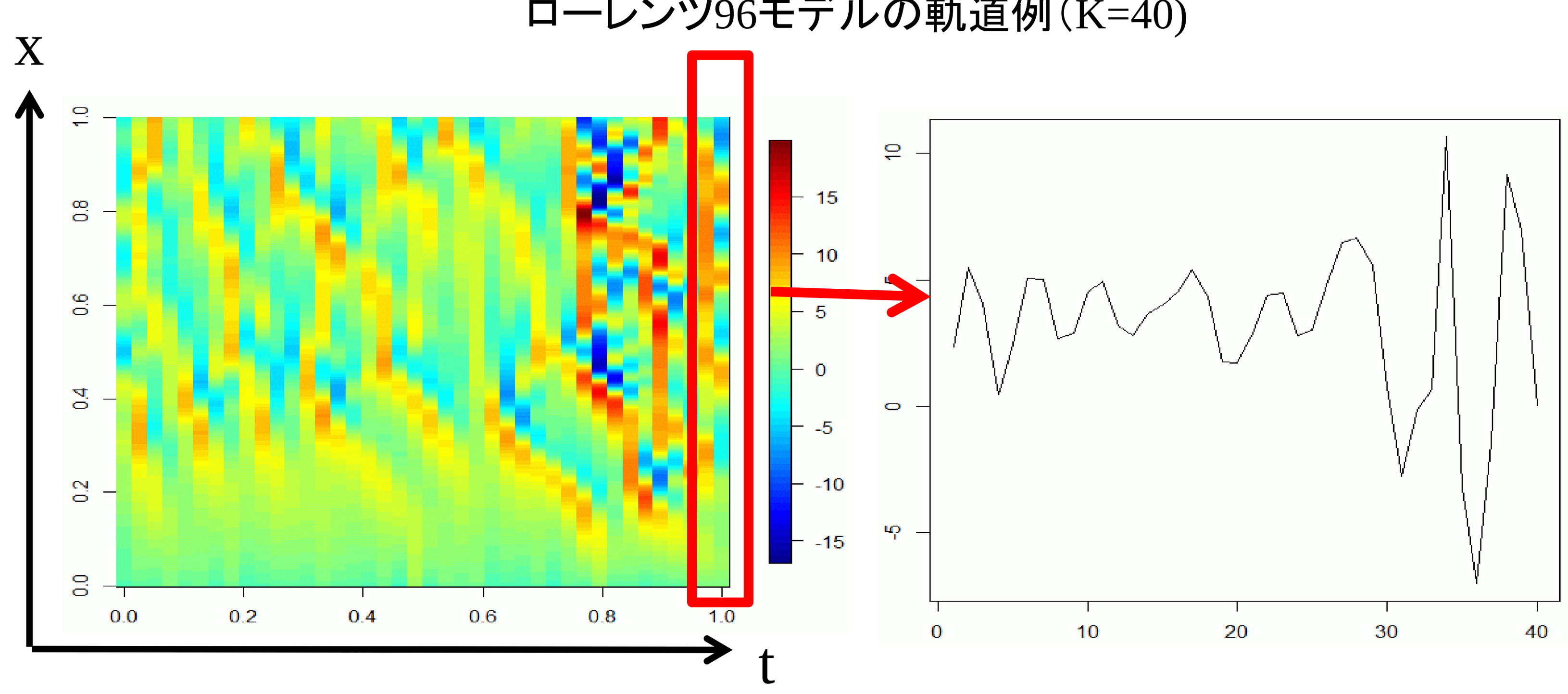


ローレンツ96モデル

大気に代表されるカオス系の振る舞いを調べるため提案されたモデル

$$\frac{dx_i}{dt}=-x_{i-2}x_{i-1}+x_{i-1}x_{i+1}-x_i+F \qquad i=1,\ldots,K$$

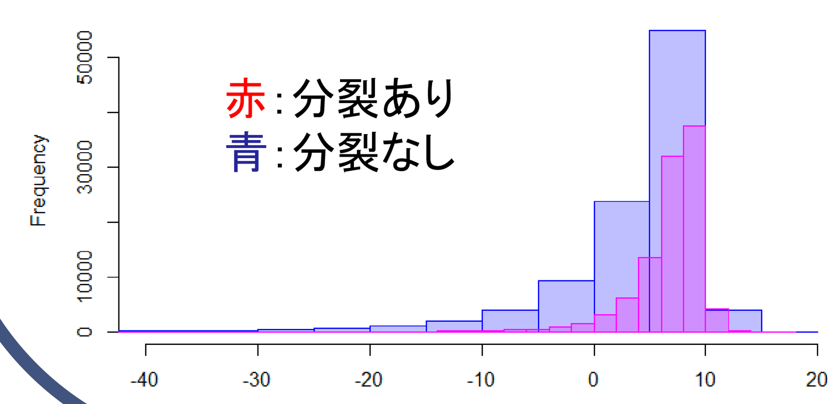
ローレンツ96モデルの軌道例（K=40）



9次元（K=9)としたローレンツ96モデルに対してシミュレーションを実施
初期：全次元1.0±13.5の一様乱数
目標：全次元1.5±3の一様乱数
最終ステップ(1000)で目標にいる確率を計算（ 10万パス、±は標準誤差）
・前進シミュレーション： 0.0890%± 0.00943%
・後進シミュレーション(ウェイトあり・分裂なし)：0.0889%±0.00323%
・後進シミュレーション(ウェイトあり・分裂あり)：0.0923%±0.00291%
・後進シミュレーション(ウェイトなし・分裂なし)：0.00001%±0.0000%

※分裂は900ステップ目で実施

最終ステップでのウェイト分布(log)



後進シミュレーションは、同モンテカルロパス数の前進シミュレーション対して、標準誤差がおおよそ1/2.92倍となっている。従って、前進シミュレーションと同じレベルの精度を出すために必要なモンテカルロパス数は、おおよそ1/8.52倍で済むため、より効率的な計算となる

謝辞
理論的なディスカッションについてご教示下さったArnoud Doucet氏、また未発表の確率台風モデルを使わせて下さった中野慎也氏に感謝致します。

参考文献

・Lorenz, Edward (1996). "Predictability – A problem partly solved" (PDF). Seminar on Predictability, Vol. I, ECMWF.
・Arnaud Doucet, Nando De Freitas, and Neil Gordon. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Springer, 2001.