

切除平面法の収束

伊藤 聡 数理・推論研究系, 統計的機械学習研究センター, 統計思考院 教授

アブストラクト：最適化問題の数値解法として知られる切除平面法を、測度空間における離散測度の極限として解を求める反復法として捉えることにより、目的関数値が単調に減少もしくは増大しないアルゴリズムを構築し、その収束性を保証することができます。

測度空間における最適化

X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とし, $f \in C(X), g \in C(Y), \varphi \in C(X \times Y)$ に対して, 以下のような最適化問題を考えます。

$$\begin{cases} \min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x) d\mu \\ \text{subject to } \int_X \varphi(x, y) d\mu \geq g(y) \quad \forall y \in Y, \quad \mu \geq 0 \end{cases} \quad (P)$$

ここで, $M(X)$ は X 上の有限な符号つき正則 Borel 測度からなる Banach 空間を表します。問題 (P) の双対問題は同様にして次のように書けます。

$$\begin{cases} \max_{\nu \in M(Y)} \int_Y g(y) d\nu \\ \text{subject to } \int_Y \varphi(x, y) d\nu \leq f(x) \quad \forall x \in X, \quad \nu \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

X, Y は巨大な有限集合でも構いません。このとき, 問題 (P), (D) は有限次元の大規模線形計画問題になります。

切除平面法

問題 (P) および (D) において, X, Y をともに有限部分集合

$$X_k := \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k\} \subset X, \quad Y_k := \{y_1^k, y_2^k, \dots, y_{m_k}^k\} \subset Y$$

で緩和すると, 有限次元の対称形線形計画問題

$$\begin{cases} \min_{\mu \in \mathbb{R}^{n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k) \mu_i \\ \text{subject to } \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(x_i^k, y_j^k) \mu_i \geq g(y_j^k), \quad j = 1, 2, \dots, m_k \\ \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_k \end{cases} \quad (P_k)$$

$$\begin{cases} \max_{\nu \in \mathbb{R}^{m_k}} \sum_{j=1}^{m_k} g(y_j^k) \nu_j \\ \text{subject to } \sum_{j=1}^{m_k} \varphi(x_i^k, y_j^k) \nu_j \leq f(x_i^k), \quad i = 1, 2, \dots, n_k \\ \nu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_k \end{cases} \quad (D_k)$$

が得られ, このとき以下のような双方向切除平面法のアルゴリズムを構成することができます。

Step 1: $X_1 = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1\}, Y_1 = \{y_1^1, y_2^1, \dots, y_{m_1}^1\}$ をそれぞれ X, Y の有限部分集合 ($n_1 = |X_1|, m_1 = |Y_1|$) とし, $k = 1$ とする。

Step 2: 緩和問題 $(P_k), (D_k)$ の最適解 $(\mu^k, \nu^k) \in \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{m_k}$ を求める。

Step 3: $(\mu^k, \nu^k) \in \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{m_k}$ に対して

$$\delta(\mu^k) := \min_{y \in Y} \left\{ \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(x_i^k, y) \mu_i^k - g(y) \right\}$$

$$\gamma(\nu^k) := \max_{x \in X} \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} \varphi(x, y_j^k) \nu_j^k - f(x) \right\}$$

を計算し, 右辺の最適解をそれぞれ \bar{y}^k, \bar{x}^k とする。

Step 4: $\delta(\mu^k) \geq 0$ かつ $\gamma(\nu^k) \leq 0$ なら, μ^k, ν^k に対応する離散測度 (X_k, Y_k の各要素に対してそれぞれ μ^k, ν^k の各成分をとる測度) を問題 (P), (D) の最適解として終了。

Step 5: $\delta(\mu^k) < 0$ なら, $Y_{k+1} := Y_k \cup \{\bar{y}^k\} = \{y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \dots, y_{m_{k+1}}^{k+1}\}, m_{k+1} := m_k + 1$, さもなくば $Y_{k+1} := Y_k = \{y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \dots, y_{m_k}^{k+1}\}, m_{k+1} := m_k$ とする。

Step 6: $\gamma(\nu^k) > 0$ なら $X_{k+1} := X_k \cup \{\bar{x}^k\} = \{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{n_{k+1}}^{k+1}\}, n_{k+1} := n_k + 1$, さもなくば $X_{k+1} := X_k = \{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{n_k}^{k+1}\}, n_{k+1} := n_k$ とする。

Step 7: $k := k + 1$ として Step 2 へ戻る。

アルゴリズムの収束

以下のような制約想定 $+\alpha$ (X_1, Y_1 があまり coarse でないこと) を仮定します。

次式を満たす $\mu \in \mathbb{R}^{n_1}$ および $\nu \in \mathbb{R}^{m_1}$ が存在する (ように X_1, Y_1 が選ばれている)。

$$\sum_{i=1}^{n_1} \varphi(x_i^1, y) \mu_i > g(y) \quad \forall y \in Y, \quad \sum_{j=1}^{m_1} \varphi(x, y_j^1) \nu_j < f(x) \quad \forall x \in X$$

このとき, 緩和問題 $(P_k), (D_k)$ の可解性 (最適解の存在) と強双対性 (最適目的関数値の一致), さらに問題 (P), (D) の可解性と強双対性が保証され, 切除平面法の大域的収束性が保証されます。

アルゴリズムで生成される μ^k, ν^k に対応する離散測度の列を考えるとき, $M(X), M(Y)$ において問題 (P), (D) の最適解にそれぞれ * 弱収束する部分列が存在する。

緩和問題を解く際は, 厳密に解く必要はなく, $\Delta_k > 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k) \mu_i^k - \sum_{j=1}^{m_k} g(y_j^k) \nu_j^k \leq \Delta_k$$

を満たす許容解 $(\mu^k, \nu^k) \in \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{m_k}$ で代用できます。 $\Delta_k \rightarrow 0$ である限り大域的収束性は損なわれません。

以下の図は, 各反復における緩和問題 $(P_k), (D_k)$ の最適目的関数値が, X, Y のいずれか一方のみを緩和して得られる2つの半無限計画問題の最適目的関数値の間にあることを表しています。

