⑫ Rankingに於ける有意差検定法

多賀　保志

m人の人がn個のものについてrankingを行った時，特定の2個のものに附けられたrankの間に有意差があるか否かを検定する方法を述べて見よう。

第i番目の人が，第j番目のものに附けたrankをx_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）とし，j番目のものについてのrankのmeanを

$$\overline{x}_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

とし，これをj番目のもののrankと考える。今簡単の為同順位は作らないとしておく。

人＼物	1	2	--------	n	平均
1	x_{11}	x_{12}	--------	x_{1n}	$\frac{n+1}{2}$
2	x_{21}	x_{22}	--------	x_{2n}	$\frac{n+1}{2}$
⋮			--------		⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	--------	x_{mn}	$\frac{n+1}{2}$
平均	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	--------	$\overline{x}_n$	$\frac{n+1}{2}$

さて今仮説としてn個のものの間にrankの差はないものとする。そしてrankの差がないものに対して（むりに）各人にrankをつけさせれば出て来るrankはあらゆる順列を作ることによって得られる$(n!)^m$通りのrankingは，すべて同様に確からしいと考えられる。どの2つのものをとって比較しても同じだから，今1番目と2番目の物のrankを比較しよう。

$$y = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

なる統計量を考えると，

$$\mu_1 = E(y) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(y^2) = \frac{n(n+1)}{6m} \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\mu_3 = E(y^3) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\mu_4 = E(y^4) = \frac{n(n+1)}{60m^3}\left\{(5m-1)n^2 + 5(m-1)n + 6\right\} \cdots (6)$$

従って

$$\beta_1 = 0 \qquad (7)$$

$$\beta_2 = 3\left\{\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{5m}\right) + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{n+1} - \frac{6}{5n(n+1)}\right\} \qquad (8)$$

となり，m, n が十分大ならば，$\beta_2 \fallingdotseq 3$ となるから，y は漸近的に $N\left(0, \frac{n(n+1)}{6m}\right)$ に従って分布すると考えられる。

（奇数次のモーメントはすべて0となる。なお一般2入次のモーメントについては註参照）

以上の事柄より，2つのものに附けられた rank の間に有意差があるか否かを検定するには，次の様に行えば良いことになる。

(i) m, n が小さい時は，Guttman の不等式[1]より，

$$P_r\left\{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| > k\sqrt{\frac{n(n+1)}{6m}}\right\} < \alpha$$

となるから，有意水準を $\alpha = 0.05$ とするには $k = 2.7$ とおけばよい。

$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 > k\sqrt{\frac{n(n+1)}{6m}}$ となれば，1番目の物の rank は2番目のそれより有意に低いと考える。

(ii) m, n が十分大で，y が $N\left(0, \sqrt{\frac{n(n+1)}{6m}}\right)$ に従うと考えられる時は，

$$P_r\left\{|\overline{x}_1-\overline{x}_2|>k\sqrt{\frac{n(n+1)}{6m}}\right\}<\alpha$$

に於て，$k=1.96$ の時 $\alpha=0.05$，$k=2.57$ の時 $\alpha=0.01$ とおけば良い。

［註］$1°$ $E(y^{2\lambda})$ の計算

$$E\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_{i1}-x_{i2})\right\}^{2\lambda}$$

$$=\frac{1}{m^{2\lambda}}\sum_{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=\lambda}\frac{(2\lambda)!}{\prod_{i=1}^{m}(2\lambda_i)!}\prod_{i=1}^{m}E(x_{i1}-x_{i2})^{2\lambda_i}$$

$$=\frac{1}{m^{2\lambda}}\sum_{\Sigma\lambda_i=\lambda}\frac{(2\lambda)!}{\prod_{i=1}^{m}(2\lambda_i)!}\prod_{i=1}^{m}\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}k^{2\lambda_i}-\sum_{k=1}^{n-1}k^{2\lambda_i+1}}{n(n-1)/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^{2\lambda_i}\fallingdotseq\frac{n^{2\lambda_i+1}}{2\lambda_i+1},\quad\sum_{k=1}^{n-1}k^{2\lambda_i+1}\fallingdotseq\frac{n^{2\lambda_i+2}}{2\lambda_i+2}$$

なる近似式を使い，$\lambda_i=0$ の場合を除いたものを $(\lambda_{i_j},\cdots\lambda_{i_t})$ とすれば

$$E(y^{2\lambda})\fallingdotseq\frac{1}{m^{2\lambda}}\sum_{t=1}^{\lambda}\sum_{\Sigma\lambda_i=\lambda}\frac{2\lambda!}{\prod_{j=1}^{m}(2\lambda_{i_j}+2)!}\binom{m}{t}\prod_{j=1}^{t}2n^{2\lambda_{i_j}}$$

$$=\frac{n^{2\lambda}}{m^{2\lambda}}\sum_{t=1}^{\lambda}\sum_{\Sigma\lambda_{i_j}=\lambda}\binom{m}{t}\frac{2^t(2\lambda)!}{\Pi(2\lambda_{i_j}+2)!}$$

$t=\lambda$ 即ち $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_m=1$ なる時 $\binom{m}{t}$ の order は最も高くなるから（その時 $\binom{m}{t}\fallingdotseq O(m^{\lambda})$）．

$$=\frac{n^{2\lambda}}{m^{2\lambda}}\cdot\frac{m^{\lambda}}{\lambda!}\cdot\left(\frac{2}{4!}\right)^{\lambda}\cdot(2\lambda)!$$

$$E(y^{2\lambda})\fallingdotseq\frac{n^{2\lambda}}{(6m)^{\lambda}}\times\frac{(2\lambda)!}{2^{\lambda}\lambda!}$$

となる。$\lambda=1$ とおけば

$$\sigma^2 = \frac{n^2}{6m} \qquad \therefore \ \sigma^{2\lambda} = \frac{n^{2\lambda}}{(6m)^\lambda}$$

となるから

$$\mu_{2\lambda} / \sigma^{2\lambda} \fallingdotseq \frac{(2\lambda)!}{2^\lambda \lambda!}$$

を得る。

2°　同順位ある場合は改めて σ^2 の値を計算すれば良い。

［例］　質問法調査[2)]に於て，都内の公立中学校2年生に，聞きたいと思う順にラヂオ番組の ranking を行わせた所次の様な結果を得た。

番組＼性	野球	落語	20のとびら	のど自慢	音楽	英会話	街頭録音	人数 m	2σ
男	① 3.006	② 3.608	③ 3.869	④ 4.045	⑦ 4.858	⑤ 4.108	⑥ 4.506	176	0.4606
女	⑦ 6.295	⑥ 4.630	② 3.267	④ 3.671	① 2.596	③ 3.562	⑤ 3.979	146	0.5128
男＋女	⑦ 4.497	⑤ 4.071	① 3.596	④ 3.876	② 3.832	③ 3.560	⑥ 4.267	322	0.3406

男について有意差がみられるものを上げると，

①＞②＞⑤＞⑦，　③＞⑥，④＞⑥

となる。　但し＞は上に計算した有意差をあらわす。（有意水準 5％）

女について見ると

①＞②＞⑤＞⑥＞⑦

となる。

男＋女について見ると

①＞⑤＞⑦，②＞⑥，③＞⑥，④＞⑥．

男と女の順位が逆になつていること，女の方に好悪の差がはつきり出ること，男女を一緒にすると順位差がぼやけてくること，等

が分り，興味深い。（なおこの問題は統計数理研究所の西平氏によつて提出された。）

---

1)　A. M. S.　Sept. (1948)

2)　統計数理研究輯報　第9号