(21) Power Function of Grubbs' Test of Outlying Observations

統計数理研究所　塩谷　実

1. 緒論　Outlying observation の有意性を検定する問題は応用統計に於て大切なものの一つで古くから種々の人に依って研究されて来てゐる。[(1), (2), (3), (4), (5)] 特に Frank E. Grubbs は order statistics を使って此の問題に対する一つの解答を与えて居る。[(4)] 其の際正規母集団から取られた大きさ n の標本に於ける一番大きな標本値の有意性を検定するのに統計量

$$(1)\qquad \frac{S_n^2}{S^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\overline{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{x}_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i,$$

を用ひて居る。同様な統計量が一番小さい標本値に対しても定義出来る。しかし上の検定の Power Function が求まって居ない。本論文は此の Grubbs の検定に対する Power を求めるのが目的であるが数値計算は未だ少しか出来て居ない。

2. 問題

正規母集団より取られた標本値 n 個を大さの順に並べたものを

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$$

とする。

そして母集団分布を

x_i ($i=1,2,\cdots\cdots,n-1$) に対して　$N(\mu:\sigma^2)$

x_n　〃〃〃〃　$N(\mu+\lambda\sigma,\alpha^2\sigma^2)$

とする。　x_n の有意性を検定する時の事情を考へれば $\lambda\geqq 0$，$\alpha\geqq 1$ としてよい。 帰無假説 H は $\lambda=0$，$\alpha=1$ で此の時の S_n^2/S^2 の分布が Grubbs に依り求められたものである。

対立假説 H' として次の3つの場合が考へられる。

$$H'\begin{cases}\text{i)} & \lambda>0, \quad \alpha=1\\ \text{ii)} & \lambda=0, \quad \alpha>1\\ \text{iii)} & \lambda>0, \quad \alpha>1\end{cases}$$

しかし iii) の場合に於ける S_n^2/S^2 の分布が求まれば充分であるから $\lambda\geqq 0$，$\alpha\geqq 1$ として，此の時の S_n^2/S^2 の分布を求めることが問題である。

3.　$\lambda\geqq 0$，$\alpha\geqq 1$　の時の S_n^2/S^2 の分布

$\mu=0$　として一般性を失はないから以下の議論ではさうしておく。

$x_1\leqq\cdots\cdots\leqq x_n$ の同時分布は

$$(2)\qquad dF(x_1,\cdots,x_n)=K_n(\lambda,\alpha)\exp-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+\left(\frac{x_n-\lambda\sigma}{\alpha}\right)^2\right\}dx_1\cdots dx_n$$

$$(x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n)$$

$$(3)\qquad K_n(\lambda,\alpha)=\frac{1}{\displaystyle\int\cdots\int_{x_1\leqq\cdots\leqq x_n}\exp-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+\left(\frac{x_n-\lambda\sigma}{\alpha}\right)^2\right\}dx_1\cdots dx_n}$$

と書ける。

$$x_i=\xi_i \qquad i=1,2,\cdots,(n-1)$$

$$x_n=\alpha\xi_n+\lambda\sigma$$

とおけば

$$(4)\quad dF(\xi_n\cdots\xi_2,\xi_1)=K_n(\lambda,\alpha)\alpha\exp-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2\right\}d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$;\ \xi_1\leqq\xi_2\leqq\cdots\leqq\xi_{n-1}\leqq\alpha\xi_n+\lambda\sigma$$

此れに次の Hermert 型の直交変換を施す。　即ち

$$(5)\begin{cases}\sqrt{2\cdot1}\,\sigma\eta_2=-\xi_1+\xi_2\\ \sqrt{3\cdot2}\,\sigma\eta_3=-\xi_1-\xi_2+2\xi_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt{(n-1)(n-2)}\,\sigma\eta_{n-1}=-\xi_1-\xi_2-\cdots\cdots-\xi_{n-2}+(n-2)\xi_{n-1}\\ \sqrt{\{1+(n-1)\alpha^2\}(n-1)}\,\sigma\left(\eta_n-\sqrt{\dfrac{n-1}{1+(n-1)\alpha^2}}\lambda\right)=-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}+(n-1)\alpha\xi_n\\ \sqrt{(n+1)+\dfrac{1}{\alpha^2}}\,\sigma\eta_{n+1}=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}+\dfrac{\xi_n}{\alpha}\end{cases}$$

しかる時は

$$(6)\quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\sum_{i=2}^{n-1}\eta_i^2+\left(\eta_n-\sqrt{\frac{n-1}{1+(n-1)\alpha^2}}\lambda\right)^2+\eta_{n+1}^2$$

であるから

$$(7)\quad dF(\eta_2,\cdots\eta_{n+1})=K_n(\lambda,\alpha)\alpha\sigma^n\exp-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=2}^{n-1}\eta_i^2\right.$$

$$\left.+\left(\eta_n-\sqrt{\frac{n-1}{1+(n-1)\alpha^2}}\lambda\right)^2+\eta_{n+1}^2\right\}d\eta_2\cdots d\eta_{n+1}$$

η_{n+1} は $-\infty<\eta_{n+1}<\infty$ で独立に積分出来るから消去してしまへば

$$(8)\quad dF(\eta_2,\cdots\eta_n)=K_n(\lambda,\alpha)\alpha\sigma^n\sqrt{2\pi}\cdot\exp-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=2}^{n-1}\eta_i^2+\left(\eta_n-\sqrt{\frac{n-1}{1+(n-1)\alpha^2}}\lambda\right)^2\right\}d\eta_2\cdots d\eta_n$$

$\eta_2,\cdots,\eta_n$ の動く範囲は変換（5）より

$$
(9)\quad \begin{cases} \infty > \eta_2 \geq 0 & \\ \sqrt{\dfrac{i}{i-2}}\,\eta_i \geq \eta_{i-1} & i = 3, \cdots, (n-1) \\ \sqrt{\dfrac{1+(n-1)\alpha^2}{(n-2)}}\,\eta_n \geq \eta_{n-1} & \end{cases}
$$

此処に於て更に Polar Transformation

$$
(10)\quad \begin{cases} \eta_2 = r \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots\cdots \sin\theta_4 \sin\theta_3 \\ \eta_3 = r \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_4 \cos\theta_3 \\ \eta_4 = r \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \cos\theta_4 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-1} = r \sin\theta_n \cos\theta_{n-1} \\ \eta_n = r \cos\theta_n \end{cases}
$$

此の変換のヤコービアンは

$$
r^{n-2} \sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \cdots \sin^2\theta_5 \sin\theta_4
$$

である。

$$
\sum_{i=2}^{n-1} \eta_i^2 + (\eta_n - a_n)^2 = r^2 - 2a_n r\cos\theta_n + a_n^2
$$

$$
e^{a_n r\cos\theta_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k \cos^k\theta_n}{k!} r^k \qquad a_n = \sqrt{\frac{n-1}{1+(n-1)\lambda^2}}\,\lambda
$$

に注意すれば $r, \theta_n, \theta_{n-1}, \cdots, \theta_3$ の同時分布は

$$
(11)\quad \begin{aligned} dF(r, \theta_3, \theta_4, \cdots, \theta_n) = K_n(\lambda, \alpha)\,\alpha\,\sigma^n \sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{a_n^2}{2}} \sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_4 \cdot \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k \cos^k\theta_n}{k!} r^{n+k-2} e^{-\frac{r^2}{2}} dr\, d\theta_n \cdots d\theta_3 \end{aligned}
$$

r を integrate out すれば

$$dF(\theta_3,\theta_4,\cdots,\theta_n)=K_n(\lambda,\alpha)\alpha\sigma^n\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{a_n^2}{2}}\times$$

(12)

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n+k-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)a_n^k}{k!}\cos^k\theta_n\sin^{n-3}\theta_n\cdots\sin\theta_4$$

$$\times\, d\theta_n\cdots d\theta_3$$

となる。　$\theta_i\ (i=3,\cdots\cdots,n)$ の範囲は (9), (10) より

(13)

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{i}{i-2}}\sec\theta_{i-1}\geq\tan\theta_i & i=4,\cdots\cdots,n-1,\\ \sqrt{\dfrac{1+(n-1)\alpha^2}{(n-2)}}\sec\theta_{n-1}\geq\tan\theta_n & \\ \dfrac{\pi}{3}\geq\theta_3\geq 0 & \end{cases}$$

扨て吾々が求めんとして居る統計量 S_n^2/S^2 を書き直して見る。

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\bar{x}_n)^2=\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i-\bar{\xi}_n)^2$$

$$=\frac{n-1}{n-2}(\xi_{n-1}-\bar{\xi}_n)^2+\frac{n-2}{n-3}(\xi_{n-2}-\bar{\xi}_{n,n-1})^2+$$

$$+\cdots\cdots+\frac{3}{2}\left(\xi_3-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}\right)^2+\frac{2}{1}\left(\xi_2-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)^2$$

(14)

$$=\sigma^2\sum_{i=2}^{n-1}\eta_i^2$$

$$=\sigma^2 r\sin^2\theta_n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i-\bar{\xi}_n)^2+\frac{n-1}{n}(\alpha\xi_n+\lambda\sigma-\bar{\xi}_n)^2$$

(15)

$$=\sigma^2\left\{\sum_{i=2}^{n-1}\eta_i^2+\frac{1+(n-1)\alpha^2}{n}\eta_n^2\right\}$$

$$=\sigma^2 r^2\left\{\sin^2\theta_n+\frac{1+(n-1)\alpha^2}{n}\cos^2\theta_n\right\}$$

故に

(16)

$$\frac{S_n^2}{S^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\left\{1+\frac{1+(n-1)\alpha^2}{n}\cot\theta_n\right\}^{-1}$$

従って $0<x<1$ なる x に対して

(17)
$$P[S_n^2/S^2 \leq x] = P\left[\tan^2\theta_n \leq \frac{1+(n-1)\alpha^2}{n}\,\frac{x}{1-x}\right]$$
$$= P\left[\theta_n \leq \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+(n-1)\alpha^2}{n}\,\frac{x}{1-x}}\right]$$

となり．θ_n の分布から S_n^2/S^2 の分布を求めることが出来る。

(18)
$$\begin{cases} C_n(\lambda,\alpha) = K_n(\lambda,\alpha)\,\alpha\,\sigma^n\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{a_n^2}{2}} \\ l_i = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{i+1}{i-1}}\sec\theta_i\right) \qquad i=3,\cdots\cdots,n-2 \\ l_{n-1} = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+(n-1)\alpha^2}{n-1}}\sec\theta_{n-1}\right) \end{cases}$$

とおけば (12), (13) より

(19)
$$C_n(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n+k-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)a_n^k}{k!}\times$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{l_3}\cdots\int_0^{l_{n-2}}\int_0^{l_{n-1}}\cos^k\theta_n\sin^{n-3}\theta_n\cdots$$
$$\sin^2\theta_5\sin\theta_4\,d\theta_n\cdots d\theta_3 = 1$$

積分の順序を交換して次々に各 n に対する θ_n の分布を求めてゆく。

$n=3$ の場合

$$C_3(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)a_3^k}{k!}\int_0^{\tan^{-1}\sqrt{1+2\alpha^2}}\cos^k\theta_3\,d\theta_3 = 1$$

故に

(20)
$$P[\theta_3 \leq \Theta] = C_3(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)a_3^k}{k!}\int_0^{\Theta}\cos^k\theta_3\,d\theta_3$$
$$0 < \Theta \leq M_3 = \tan^{-1}\sqrt{1+2\alpha^2}$$

$n = 4$ の場合

$$C_4(\lambda, \alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)a_4^k}{k!}\left\{\int_0^{m_4'}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^k\theta_4 \sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4 + \int_{m_4'}^{M_4'}\int_{L_4'}^{\pi/3} \cos^k\theta_4 \sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4\right\} = 1$$

茲に $\quad m_4' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+3\alpha^2}{2}}, \quad M_4' = \tan^{-1}\sqrt{2(1+3\alpha^2)}$

$$L_4' = \sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{1+3\alpha^2}}\tan\theta_4\right)$$

故に $\quad 0 < \Theta \leq m_4' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+3\alpha^2}{2}}$ の時は

(21)

$$P[\theta_4 \leq \Theta] = \frac{\pi}{3}C_4(\lambda\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)a_4^k}{k!}\int_0^{\Theta}\cos^k\theta_4 \sin\theta_4 d\theta_4$$

$m_4' \leq \Theta \leq M_4'$ の時は

$$P[\theta_4 \leq \Theta] = C_4(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)a_4^k}{k!}\left\{\frac{\pi}{3}\int_0^{m_4'}\cos^k\theta_4 \sin\theta_4 d\theta_4 + \int_{m_4'}^{\Theta}\int_{L_4'}^{\pi/3}\cos^k\theta_4 \sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4\right\}$$

$n = 5$ の場合

$$C_5(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)a_5^k}{k!}\left\{\int_0^{m_5'}\int_0^{m_4}\int_0^{\pi/3} + \int_0^{m_5'}\int_{m_4}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3} + \int_{m_5'}^{M_5'}\int_{L_5'}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\right\}\cdot$$

$$\cdot \cos^k\theta_5 \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 = 1$$

茲に $\quad m_5' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+4\alpha^2}{3}}, \quad M_5' = \tan^{-1}\sqrt{3(1+4\alpha^2)}$

$$m_4 = \tan^{-1}\sqrt{\frac{4}{2}}, \quad M_4 = \tan^{-1}\sqrt{4.2}$$

$$L_4 = \sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{4}}\tan\theta_4\right), \quad L_5' = \sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{1+4\alpha^2}}\tan\theta_5\right)$$

故に $\quad 0 < \Theta \leq m_5'$ の時は

$$(22)\quad \begin{cases} P[\theta_5 \le \Theta] = C_5(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma(\frac{k+4}{2})a_5^k}{k!}\left\{\int_0^{\Theta}\int_0^{m_4}\int_0^{\pi/3}+\int_0^{\Theta}\int_{m_4}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\right\}\cdot \\ \qquad \cdot\cos^k\theta_5\sin^2\theta_5\sin\theta_4\,d\theta_3\,d\theta_4\,d\theta_5 \\ m_5' \le \Theta \le M_5' \text{ の時は} \\ P[\theta_5 \le \Theta] = C_5(\lambda,\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma(\frac{k+4}{2})a_5^k}{k!}\left\{\int_0^{m_5'}\int_0^{m_4}\int_0^{\pi/3}+\int_0^{m_5'}\int_{m_4}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\right. \\ \qquad \left.+\int_{m_5'}^{\Theta}\int_{L_5}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\right\}\cos^k\theta_5\sin^2\theta_5\sin\theta_4\,d\theta_3\,d\theta_4\,d\theta_5 \end{cases}$$

但し　$\theta_4 \le m_4 = \tan^{-1}\sqrt{\frac{4}{2}}$　の時は　$L_4 = 0$　とおく。

以上の如く Power を計算する式は求まつたが $C_5(\lambda,\alpha)$ がわかって居ないことと，積分が複雑であるため数値計算は極めて困難である。　此の中で対立假設を $\lambda=0,\ \alpha>1$ とした場合は計算が比較的簡単であるから此の場合を少し数値計算して見よう。

計算すべき式は次の様になる。

茲では　$C_n(0,\alpha)2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2}) = C_n^*(0,\alpha)$　とおく。

$n=3$ の場合

$$(23)\qquad P[\theta_3 \le \Theta] = C_3^*(0,\alpha)\int_0^{\Theta}d\theta_3 \qquad 0<\Theta\le M_3=\tan^{-1}\sqrt{1+2\alpha^2}$$

$n=4$ の場合

$$0<\Theta\le m_4' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+3\alpha^2}{2}} \text{ の時は}$$

$$(24)\quad \begin{cases} P[\theta_4 \le \Theta] = \frac{\pi}{3}C_4^*(0,\alpha)\int_0^{\Theta}\sin\theta_4\,d\theta_4 \\ m_4' \le \Theta \le M_4' = \tan^{-1}\sqrt{2(1+3\alpha^2)} \text{ の時は} \\ P[\theta_4 \le \Theta] = \frac{\pi}{3}C_4^*(0,\alpha)\int_0^{m_4'}\sin\theta_4\,d\theta_4 + C_4^*(0,\alpha)\int_{m_4'}^{\Theta}\int_{L_4}^{\pi/3}\sin\theta_4\,d\theta_3\,d\theta_4 \end{cases}$$

$n = 5$ の場合

$$0 < \Theta \leq m_5' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+4\alpha^2}{3}}$$ の時は

(25)

$$P[\theta_5 \leq \Theta] = C_5^*(0,\alpha)\int_0^{\Theta}\left\{\int_0^{m_4}\int_0^{\pi/3}\sin\theta_4 d\theta_4 d\theta_3 + \int_{m_4}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4\right\}\sin^2\theta_5 d\theta_5$$

$$= \frac{C_5^*(0,\alpha)}{C_4^*(0,1)}\int_0^{\Theta}\sin^2\theta_5 d\theta_5$$

$$m_5' \leq \Theta \leq M_5' = \tan^{-1}\sqrt{3(1+4\alpha^2)}$$ の時は

$$P[\theta_5 \leq \Theta] = \frac{C_5^*(0,\alpha)}{C_4^*(0,1)}\int_0^{m_5'}\sin^2\theta_5 d\theta_5 + C_5^*(0,\alpha)\int_{m_5'}^{\Theta}\int_{L_5}^{M_4}\int_{L_4}^{\pi/3}\sin^2\theta_5\sin\theta_4 d\theta_3 d\theta_4$$

但し $\theta_4 \leq m_4 = \tan\sqrt{\frac{4}{2}}$ の時には $L_4 = \sec^{-1}(\sqrt{\frac{2}{4}}\tan\theta_4) = 0$ とおく.

一般に n の時には

$$0 < \Theta \leq m_n' = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+(n-1)\alpha^2}{(n-2)}}$$ の時は

(26)

$$P[\theta_n \leq \Theta] = \frac{C_n^*(0,\alpha)}{C_{n-1}^*(0,\alpha)}\int_0^{\Theta}\sin^{n-3}\theta_n d\theta_n$$

$$m_n' \leq \Theta \leq M_n = \tan^{-1}\sqrt{(n-2)(1+(n-1)\alpha^2)}$$ の時は

$$P[\theta_n \leq \Theta] = \frac{C_n^*(0,\alpha)}{C_{n-1}^*(0,1)}\int_0^{m_n'}\sin^{n-3}\theta_n d\theta_n + C_n^*(0,\alpha)\int_{m_n'}^{\Theta}\int_{L_n}^{M_{n-1}}\cdots\int_{L_4}^{\pi/3}\sin^{n-3}\theta_n\cdots\sin\theta_4 d\theta_3\cdots d\theta_n$$

但し $L_4, \cdots, L_{n-1}$ は夫々 $\theta_i \leq m_i = \tan\sqrt{\frac{i}{i-2}}$ $\{i = 4, \cdots, (n-1)\}$ なる時には 0 と置く。

此の $\lambda = 0$, $\alpha > 1$ を対立假設とした場合に於いてすら数値計算は困難で僅かに n の低い値の時にのみ求まった.

でも大体の様子は判ると思ふ. 第1, 2表に計算結果をのせ第1, 2図にその様子をグラフに描いておいた。

参 考 文 献

(1) W. R. Thompson. "On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of deviation to sample standard deviation." Annals of Math. Statist. Vol. 6 (1935). P. 214.

(2) E. S. Pearson and C. Chandra Sekar, "The efficiency of statistical tools and a criterion for rejection of outlying observations." Biometrika. Vol. 28, (1936). p. 308

(3) 森口繁一：実験データの棄却について．数学，Vol. 2. No. 1. (1949). P. 65.

(4) Frank E. Grubbs ; "Sample criteria for testing outlying observations" Annals of Math. Stat. Vol. 21. NO. 1. (1950). pp. 27-58.

(5) 小川潤次郎；実験データの棄却について．統数研講究録，Vol. 6. No. 5 (1950)

TABLE 1

$P\left[\frac{S_n^2}{S^2} \leq x_n(0.05)\right]$, when $H': \lambda=0, \alpha>1$

$n \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	10
3	0.050	0.072	0.097	0.122	0.148	0.268
4	0.050	0.108	0.183	0.261	0.335	0.588
5	0.050	0.132	0.255	0.363	0.458	0.697
6						

註： $x_3(0.05)=0.0027$, $x_4(0.05)=0.0494$, $x_5(0.05)=0.1270$
$x_6(0.05)=0.2032$

TABLE 2.

$P\left[\frac{S_n^2}{S^2} \leq x_n(0.01)\right]$, when $H': \lambda=0, \alpha>1$.

$n \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	10
3	0.010	0.014	0.019	0.024	0.029	0.054
4	0.010	0.023	0.043	0.068	0.097	0.264
5	0.010	0.032	0.078	0.136	0.202	0.468
6						

註： $x_3(0.01)=0.0001$, $x_4(0.01)=0.0100$, $x_5(0.01)=0.0442$
$x_6(0.01)=0.0928$

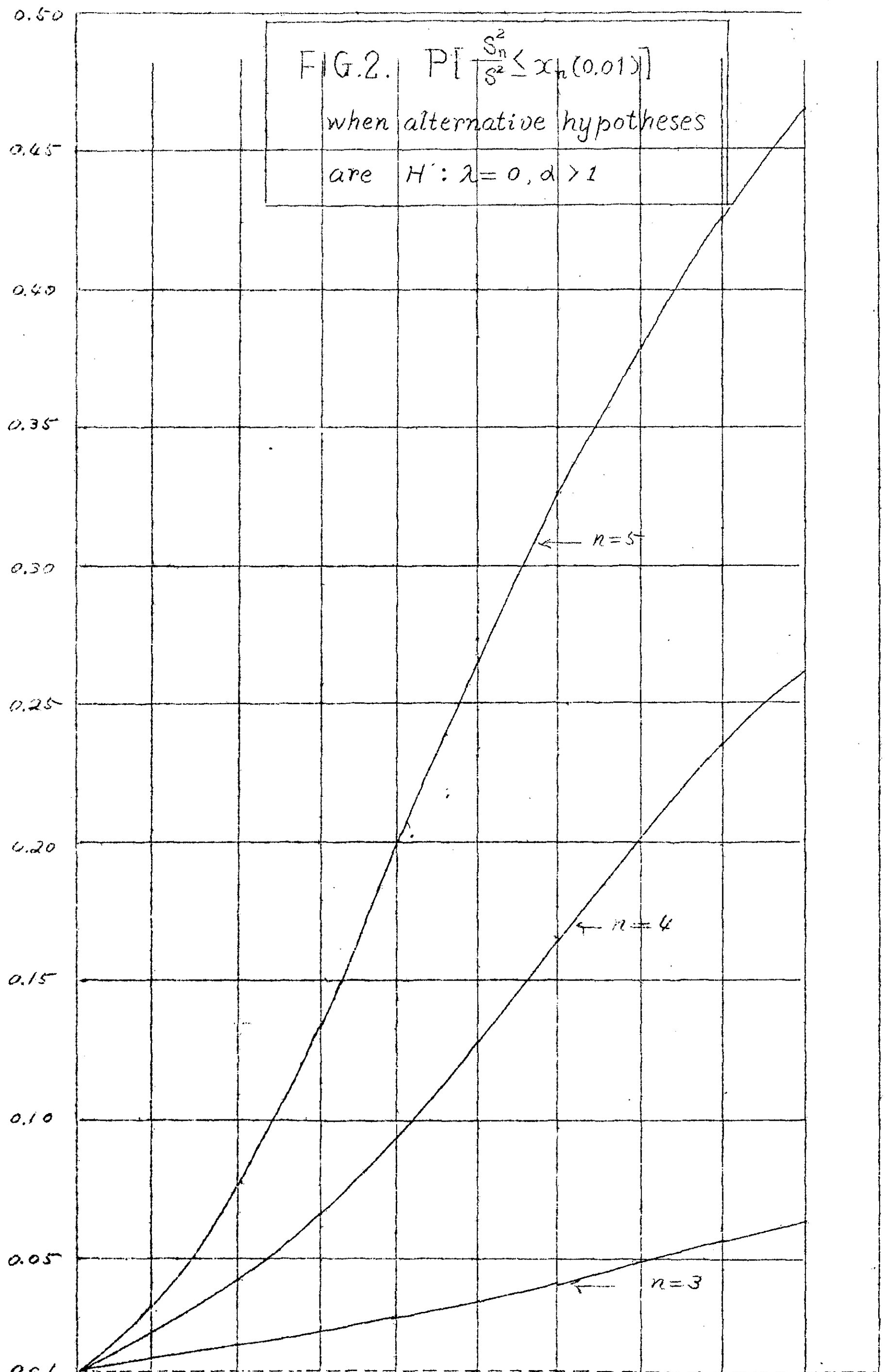
FIG.2. $P\left[\frac{S_n^2}{S^2} \leq x_n(0.01)\right]$
when alternative hypotheses
are $H': \lambda = 0, \alpha > 1$
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.01
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
α
$n=5$
$n=4$
$n=3$

FIG. 1. $P\left[\frac{S_n^2}{S^2} \le x_n(0.05)\right]$ when alternative hypotheses are H': $\lambda = 0$, $\alpha > 1$