(22) ある linear filter 機構の作製について

（毛細管よりの流出を利用する流量推定機構）

菅原正巳

丸山文行

1. 我々が雨量 $f(t)$ から，川の流量 $g(t)$ を推定するに用いた方式は，数学的に言えば

$$g(t)=\int_0^\infty K(s)f(t-s)\,ds$$

なる演算を基調とするものであつて，Wiener のいわゆる linear filter である。

我々は $K(s)$ として指数函数の組合せを用い，また時として linear でない條件を附け加えたが，基調となるのは

$$g(t)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} f(t-s)\,ds$$

なる演算であり，これを時系列の形に直し，級数の形に書いたのが，我々のいわゆる「繰り入れ計算」

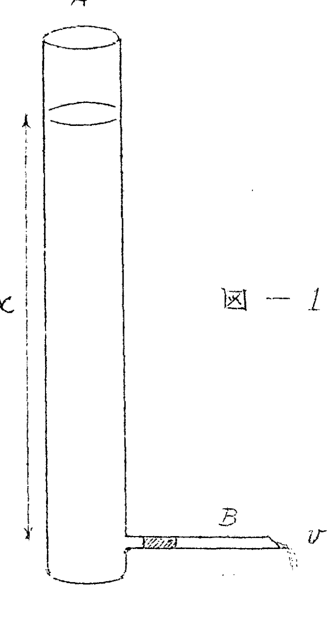
$$g_i=(1-r)\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_{i-j}$$

であつた。

2.　以上の「繰り入れ計算」は，連乗式計算機を用いれば，習熟により，相当速かに行うことができるとはいえ，この演算を機械化することは望ましいことであった。

我々は毛細管よりの水の流出を利用して，甚だ簡単な計算機構を作ることに成功した。

3.　我々の用いた機構，及び原理は甚だ簡単で，Aなる底の閉じた，垂直に立てられたガラス管の下部に，B,なる毛細管を水平に取りつけたものに過ぎない。



図－1

ガラス管Aに入れられた水は，毛細管Bより流出する。
その流出速度vは，ポアゼーユの法則により，毛細管の両端の圧力差に比例する。　その圧力差はガラス管Aの水圧によるものであるから，毛細管よりの流出速度は，毛細管の位置から測つた水面の高さxに比例する。

$$v = kx$$

流出により，ガラス管Aの水面は低下する。

水面の低下速度$-\dfrac{dx}{dt}$に，管Aの断面積Sを掛けたものが，vに等しいから

$$v = -S\frac{dx}{dt}$$

以上の二式より

$$-S\frac{dx}{dt} = kx, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{S}x.$$

即ち水面は指数函数的に低下し，従って流出する水も指数函数

的に減少する。

4. 管 A の水が指数函数的に流出することから，管 A に $f(t)$ なる速度で水を注入すれば，毛細管 B から

$$g(t)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}f(t-s)\,ds \qquad (\text{但し}\ \lambda=\frac{k}{S})$$

で水が流出することがわかる。

これを叮寧に計算で示せば次のようになる。

流入と流出の差の積分が管 A の中の水の量であるから，

$$\int_{-\infty}^{t}\left(f(t)-g(t)\right)dt=Sx(t).$$

流出は水の高さに比例するから，

$$g(t)=kx(t).$$

この二式から $x(t)$ を消去して

$$f(t)-g(t)=\frac{S}{k}g'(t),$$

従って

$$g'(t)+\lambda g(t)=\lambda f(t) \qquad (\lambda=\frac{S}{k})$$

が出る。　これは $g(t)$ に関する一階線型微分方程式だから，直ちに解けて

$$g(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\lambda f(z)e^{\lambda z}dz+c\right)e^{-\lambda t}$$

となる。

実際にこの機構を用いる時は，ある時刻以前は $f(t)=0$ で，その時は $g(t)=0$ だから，上の積分定数 C は 0 である。即ち

$$g(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\lambda f(z)e^{\lambda z}dz\right)\times e^{-\lambda t}$$

これは容易に

$$g(t)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} f(t-s)\,ds$$

と変形される。

5. 以上は管Aに連続的に水を注入する場合である。

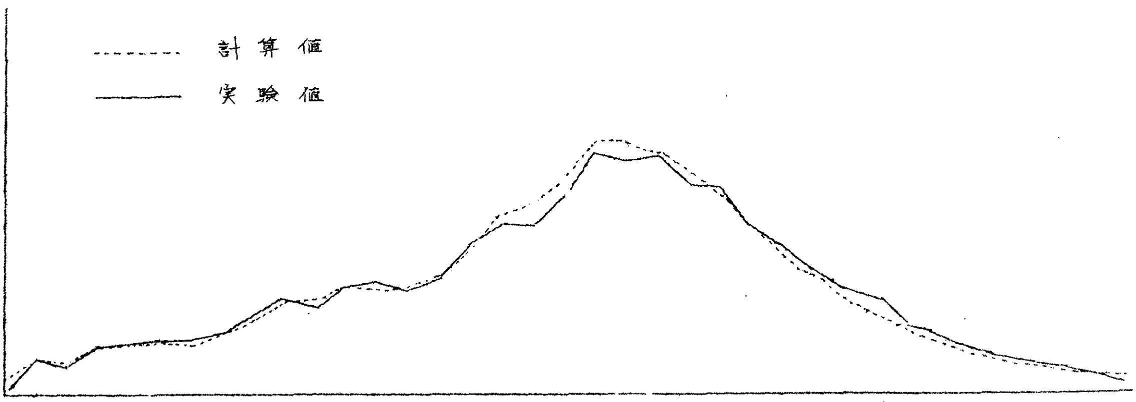
一定時間間隔τを置いて順次水を$\{x_i\}$ずつ注入し，流出する水もτ間隔毎に貯めて測ったものを$\{y_i\}$とすれば，（ある時刻にx_iの水を注入し，それからτなる時間の間に流出した水の総量がy_iである）

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} (1-r)\, r^j x_{i-j}, \qquad r=e^{-\lambda\tau}$$

なる関係が成立するから，これによって繰り入れ計算ができる。

6. この機構を思いついた時，取り敢えずビュレットよりの流出を測り，これを片対数方眼紙にプロットして見たところ，点はよく直線上にのり，この方法の有望なことを示した。

7. 図－2はこの機構を作成して計算を行った結果を示すもの



図－2

で，この計算機構を用いて出した数値と，計算機を用いて出した数値とを示してある。

この実験では，ガラス管Aとして，内径2.12 cm.（断面積.

$S = 3.56\ cm^2$）のものを用い，毛細管としては内径約 2 mm，長さ約 20 cm のものを用いた。 時間の単位を 5 秒にとったとき，$k = 0.675$ で，$\lambda = \frac{k}{S} = 0.19$，従って $r = e^{-0.19} = 0.83$ である。 図－2の計算値というのは $r = 0.83$ で繰り込み計算をした結果である。（この計算例は，神流川の昭和 16 年 8 月洪水の流量推定計算である。）

時間を測るにはメトロノームを用いた。 例えば 5 秒間隔ならば，1 分間 48 回にして 4 拍子にすればよい。

メトロノームの鐘が鳴る毎にビーカーで管 A に水を入れ，毛細管よりの水を受けるビーカーを交換する。

8． 管 A の太さを種々変えることにより，また毛細管 B の太さ及び長さを種々変えることにより，また時間の単位を変えることにより，λ，従って r の値を種々に変えることができる。

9． 管 A に水を入れ，毛細管より流出させながら，水の流出を測って見ると，実際には完全には指数函数的にはならない。

しかし，管 A の水の高さが 30 cm 以下の程度であれば，まず指数函数的と考えても差し支えない。

図－2の実験はその範囲内で行ったものである。

10． 流出が指数函数でなくなるのは，毛細管からの流出速度 v が，正しくは水の高さ x に比例しないことによる。 図－3はこれを示している。

流出速度 v が x に比例せず，

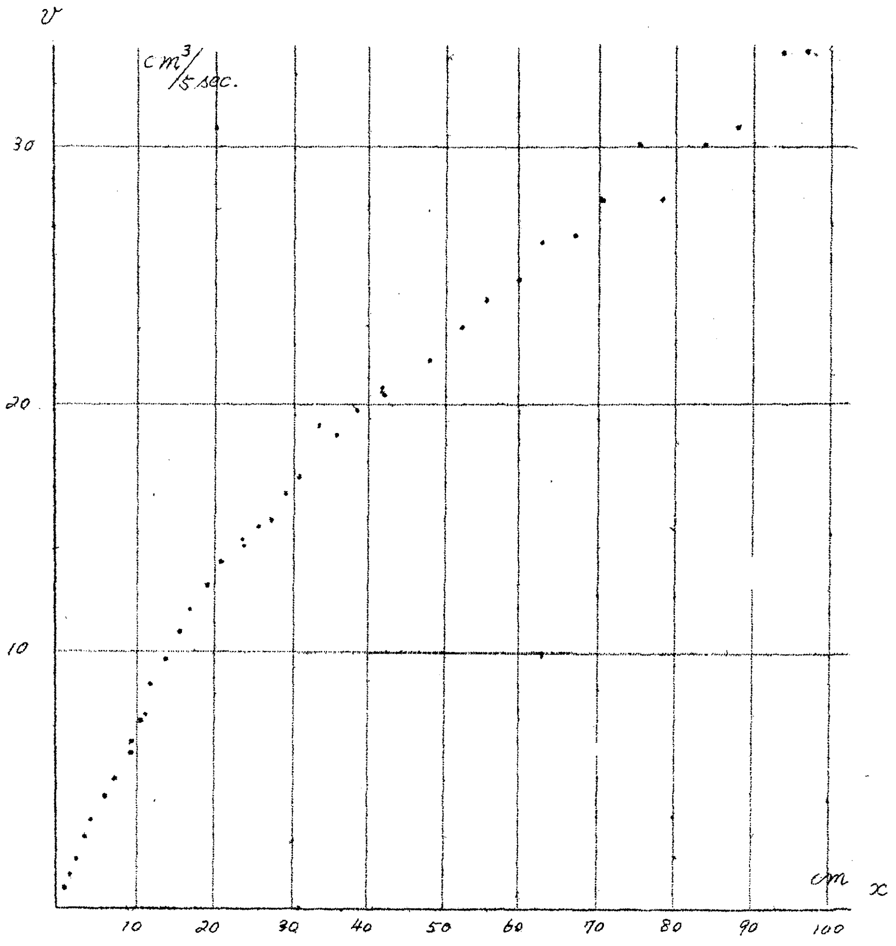
$$v = v(x)$$

なる函数となるときは，次のような工夫により，指数函数的流出を得ることができる。 いま管 A の太さが一様でなく，x なる位置の断面積を $S(x)$，そこまでの体積を $V(x)$ とする。

こゝで

$$\frac{d}{dx} V(x) = S(x)$$

が成立する。



図— 3

も細管よりの流出により，管Aの水は減少するから，

$$-\frac{dV}{dt} = v(x)$$

こゝで，この $v(x)$ が $\lambda V(x)$ に等しくなればよい。

$$v(x) = \lambda V(x).$$

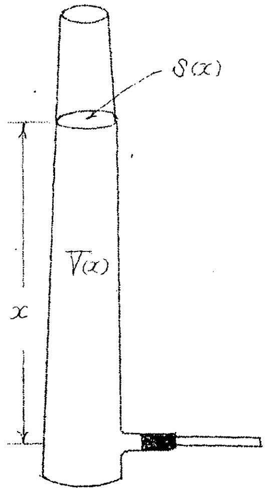
これより

$$v'(x) = \lambda V'(x) = \lambda S(x).$$

即ち，$v = v(x)$ の微分係数の λ倍に等しいように，管Aの断面積をきめればよい。

図－4はこれを模型的に示している。

実際に，このような管を作るのはかなり面倒であるが，管Aの中に細いガラス管を途中まで挿し込み，上の方の断面積を小さくすれば，これだけの補正によっても，十分有効な効果が現われる。



図－4