㉗ Interpolationの公式について

渡　辺　　寿　　夫

1.　自己共変量のスペクトル測度が有限区間の外で常数となるとき，*Interpolation* の公式が成り立つ。

これは *Information theory* の基本定理であるが，収斂の意味が明確でない。　ここでその確率論的証明を試みることにした。

2.　二乗平均の意味で連続な弱定常確率過程 $X(t)\ -\infty<t<\infty$ の自己共変量は

$$(1)\qquad \rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\omega}d\sigma(\omega)$$

なるスペクトル表示が可能である。　特にスペクトル測度 $\sigma(\omega)$ が有限区間の外で常数となるとき，区間を原點に対稱に取る事によって (1) は

$$(2)\qquad \rho(t)=\int_{-W}^{W}e^{it\omega}d\sigma(\omega)$$

と書き表はされる。　$X(t)$ について，$E\{X(t)\}=0$ と假定しても，一般性を失はない。

$\mathfrak{M}=\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$ の張る閉線状集合体 $L_2(X)$ を

考へると，$\|X(t)\|^2 = E\{|X(t)|^2\}$ なるノルムに関してヒルベルト空間を作る事がわかる。

次に連続定常確率過程に於ける積分を次の様に定義する。$X(t)$ を $[a, b]$ に於ける連続定常確率過程，$\varphi(t)$ を $[a, b]$ に於けるリーマン積分可能な函数とし，$X(t)\varphi(t)$ の区間 $[a, b]$ に於ける積分を考へる。　区間 $[a, b]$ に分割

$$\underset{(n)}{\Delta}: \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$$

$$t_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

を施して，

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X(t'_k)\varphi(t'_k)(t_k - t_{k-1})$$

を作る。　こゝで t'_k は $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$ なる任意の點とし，Y_n の二乗平均の意味での極限をもつて積分を定義し，$\int_a^b X(t)\varphi(t)dt$ で表はす．実際，

$$E\{Y_n \overline{Y_m}\} = E\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} X(t'_k)\overline{X(t'_l)}\varphi(t'_k)\varphi(t'_l)(t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1})\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \rho(t'_k - t'_l)\varphi(t'_k)\varphi(t'_l)(t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1}),$$

であるから，$n, m \to \infty$ とするとき，連続定常確率過程の自己共変量 $\rho(t)$ は t の連続函数である事を利用すると，

$$\lim_{n,m\to\infty} E\{Y_n \overline{Y_m}\} = \int_a^b\int_a^b \rho(t-s)\varphi(t)\varphi(s)\,dt\,ds.$$

従って，

$$\lim_{n,m\to\infty} \|Y_n - Y_m\|^2 = \lim_{n,m\to\infty}\left\{\|Y_n\|^2 - E(Y_n\overline{Y_m}) - E(\overline{Y_n}Y_m) + \|Y_m\|^2\right\} = 0$$

故に，Riesz－Fischer の定理により，

$$\lim_{n \to \infty} \| Y_n - Y_m \|^2 = 0$$

なる $L^2(X)$ の元 Y が存在する. 故に, 積分

$Y = \int_a^b X(t)\varphi(t)dt$ が存在する。

更に任意の $L_\alpha(X)$ の元 $X(s)$ に対して.

$$(3) \quad E\left\{ X(s) \cdot \int_a^b \overline{X(t)}\varphi(t)dt \right\} = \int_a^b \rho(s-t)\varphi(t)dt$$

が成立する。

$$(\because) \quad \left| E\{X(s)\overline{Y}_n\} - E\{X(s)\cdot\overline{Y}\} \right|^2 \leqq \left[E\{ |X(s)(Y_n - Y)| \} \right]^2$$

$$\leqq \| X(s) \|^2 \| Y_n - Y \|^2. \quad (\text{Schwarz の不等式}).$$

故に,

$$\lim_{n\to\infty} E\{ X(s) Y_n \} = E\{ X(s)\cdot Y \}.$$

こゝで, 左辺は,

$$\lim_{n\to\infty} E\{X(s)\cdot\overline{Y}_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} E\{X(s)\overline{X(t'_k)}\varphi(t'_k)(t_k - t_{k-1})\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \rho(s-t'_k)\varphi(t'_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$= \int_a^b \rho(s-t)\varphi(t)dt$$

となるから, (3) を得る.

又 $\quad \big| \|Y_n\| - \|Y\| \big| \leqq \|Y_n - Y\|$ より

$$\lim_{n\to\infty} \|Y_n\| = \|Y\| \qquad \text{を得る.}$$

従って,

$$(4) \quad \int_a^b \int_a^b \rho(t-s)\varphi(t)\varphi(s)\,dt\,ds = E\left\{ \left| \int_a^b X(t)\varphi(t)dt \right|^2 \right\}.$$

今函数系

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \quad (-\infty<t<\infty)$$

をとる。しかるに，

$$\frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\pi(2Wt-n)x}dx$$

であるから Parseval の定理を用ひると，

$$2W\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)}\,\frac{\sin\pi(2Wt-m)}{\pi(2Wt-m)}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}\,e^{i\pi(n-m)x}dx$$

$$= \pi\,\frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & (n\neq m) \\ \pi & (n=m) \end{cases}$$

従って，函数系 $\varphi_n(t)$ は直交函数系を作る。

そのとき，$X(t)$ の Fourier 係数を与へるものとして，次の定理が成立する。

定理 1

$$(5) \qquad X\left(\frac{n}{2W}\right) = W \underset{T\to\infty}{l.i.m.}^{(*)}\int_{-T}^{T}X(t)\varphi_n(t)dt$$

証明　積分 $\int_{-T}^{T}X(t)\varphi(t)dt$ の存在する事は既に示した。

(5) を証明するには，

$$\lim_{T\to\infty}\left\| X\left(\frac{n}{2W}\right)-\int_{-T}^{T}X(t)\varphi_n(t)dt\right\|^2 = 0$$

を云へばよい。

(註)　$l.i.m.$ は limit in the mean の略

(2), (3), (4) を用ひると，

$$\left\| X\left(\frac{n}{2W}\right) - W\int_{-T}^{T} X(t)\varphi_n(t)dt \right\|^2$$

$$= \rho(0) - W\int_{-T}^{T}\rho\left(\frac{n}{2W}-t\right)\varphi_n(t)dt - W\int_{-T}^{T}\rho\left(t-\frac{n}{2W}\right)\varphi_n(t)dt$$

$$+ W^2\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\rho(t-s)\varphi_n(t)\varphi_n(s)dt\,ds$$

$$= \int_{-W}^{W} d\sigma(\omega) - W\int_{-T}^{T}\varphi_n(t)\int_{-W}^{W} e^{i\left(\frac{n}{2W}-t\right)\omega}d\sigma(\omega)\,dt$$

$$- W\int_{-T}^{T}\varphi_n(t)\int_{-W}^{W} e^{i\left(t-\frac{n}{2W}\right)\omega}d\sigma(\omega)dt + W\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-W}^{W} e^{i(t-s)\omega}\varphi_n(t)\varphi_n(s)d\sigma(\omega)dt\,ds$$

第二，第三，第四項の被積分函数は絶対收斂するから，Fubini の定理を使ふと，積分順序の交換が出來て

$$\int_{-W}^{W}\left| 1 - W\int_{-T}^{T} e^{i\omega\left(t-\frac{n}{2W}\right)}\varphi_n(t)dt \right|^2 d\sigma(\omega)$$

を得る。

$$\Phi_T(\omega) = W\int_{-T}^{T} e^{i\omega\left(t-\frac{n}{2W}\right)}\frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi WT-n\pi}^{2\pi WT-n\pi} e^{i\omega\frac{y}{2\pi W}}\frac{\sin y}{y}dy$$

$(y=\pi(2Wt-n)$ とおく$)$

とおいて，積分区間を分けると，

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi WT-n\pi}^{-2\pi WT} + \int_{-2\pi WT}^{2\pi WT} + \int_{2\pi WT}^{2\pi WT-n\pi}\right) e^{i\omega\frac{y}{2\pi W}}\frac{\sin y}{y}dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi WT}\frac{\sin y\left(1+\frac{\omega}{2\pi W}\right)+\sin y\left(1-\frac{\omega}{2\pi W}\right)}{y}dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi WT-n\pi}^{-2\pi WT}+\int_{2\pi WT}^{2\pi WT-n\pi}\right)e^{i\omega\frac{y}{2\pi W}}\ \frac{\sin y}{y}\,dy$$

$$=\ \Phi_{1T}(\omega)+\Phi_{2T}(\omega)$$

を得る。

$\int_0^y \frac{\sin y}{y}dy = g(y)$ とおくと，$g(y)$ は y の連続函数で，且 $\lim_{y\to\infty} g(y)=\frac{\pi}{2}$，$\lim_{y\to-\infty} g(y)=-\frac{\pi}{2}$ であるから，$-\infty<y<\infty$ で $g(y)$ は有界，故に $\Phi_{1T}(\omega)=g\left(2\pi WT\left(1+\frac{\omega}{2\pi W}\right)\right)$ は $T,\ \omega$ に関して一様に有界である。又 $1\pm\frac{\omega}{2\pi W}\geq 1-\frac{1}{2\pi}>0$，であるから，

$$\lim_{T\to\infty}\Phi_{1T}(\omega)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\,sgn\left(1+\frac{\omega}{2\pi W}\right)+\frac{\pi}{2}\,sgn\left(1-\frac{\omega}{2\pi W}\right)\right]=1$$

を得る。

一方十分大きな T に対して，

$$\left|\Phi_{2T}(\omega)\right|\leq\left[\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-2\pi WT-n\pi}^{-2\pi WT}\frac{1}{y}dy\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{2\pi WT-n\pi}^{2\pi WT}\frac{1}{y}dy\right|\right.$$

$$\leq\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2\pi WT}+\frac{1}{2\pi WT-n\pi}\right).$$

故に

$$\lim_{T\to\infty}\Phi_{2T}(\omega)=0$$

更に，

$$\left|\Phi_{2T}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi WT-n\pi}^{-2\pi WT}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi WT-n\pi}^{2\pi WT}dy=n$$

より $\Phi_{2T}(\omega)$ は，T,ω に関して一様に有界なる事がわかる。以上の事より $\Phi_T(\omega)$ は $T,\ \omega$ に関して一様に有界で，且 $\lim_{T\to\infty}\Phi_T(\omega)=1$ なる事がわかったから，Lebesgue の収斂定

理を用ひて，

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-W}^{W}\left|1-\Phi_T(\omega)\right|^2 d\sigma(\omega)=0$$

が得られ，

$$\lim_{T\to\infty}\left\|X\left(\frac{n}{2W}\right)-W\int_{-T}^{T}X(t)\varphi_n(t)dt\right\|^2=0$$

となり，(5) を生ずる。

$X\left(\frac{n}{2W}\right)$ を Fourier 係数とする直交函数 $\varphi_n(t)$ による $X(t)$ の Fourier 展開を表はすものとして次の定理を得る。

定理 2

$$(6)\qquad X(t)\cong\sum_{-\infty}^{\infty}X\left(\frac{n}{2W}\right)\frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)}$$

$$(-\infty<t<\infty)$$

証明

$$\left\|X(t)-\sum_{-N}^{N}X\left(\frac{n}{2W}\right)\varphi_n(t)\right\|^2$$

$$=\rho(0)-\sum_{-N}^{N}\rho\left(t-\frac{n}{2W}\right)\varphi_n(t)-\sum_{-N}^{N}\rho\left(\frac{n}{2W}-t\right)\varphi_n(t)+\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\rho\left(\frac{1}{2W}(n-m)\right)\varphi_n(t)\varphi_m(t)$$

$$=\int_{-W}^{W}d\sigma(\omega)-\sum_{-N}^{N}\int_{-W}^{W}e^{i\omega\left(t-\frac{n}{2W}\right)}\varphi_n(t)d\sigma(\omega)-\sum_{-N}^{N}\int_{-W}^{W}e^{i\omega\left(\frac{n}{2W}-t\right)}\varphi_n(t)d\sigma(\omega)$$

$$+\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\int_{-W}^{W}e^{i\omega\left(\frac{1}{2W}(n-m)\right)}\varphi_n(t)\varphi_m(t)d\sigma(\omega)$$

$$=\int_{-W}^{W}\left|1-\sum_{-N}^{N}\varphi_n(t)e^{i\omega\left(\frac{n}{2W}-t\right)}\right|^2 d\sigma(\omega)$$

$$\Psi_N(\omega)=\sum_{-N}^{N}\varphi_n(t)e^{i\omega\left(\frac{n}{2W}-t\right)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{-N}^{N}e^{i\omega\left(\frac{n}{2W}-t\right)+\pi(2Wt-n)xi}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{-N}^{N}e^{-i\left(\pi x-\frac{\omega}{2W}\right)n}\right)\cdot e^{i(2\pi Wx-\omega t)}dx$$

ここで $\displaystyle\sum_{-N}^{N}e^{-iun}=e^{-iNu}\sum_{0}^{2N}e^{inu}=e^{-iNu}\frac{e^{i(2N+1)u}-1}{e^{iu}-1}=\frac{\sin\frac{2N+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}$

なることを利用すると,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{it(2\pi W)(-\omega)} \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\left(\pi x-\frac{\omega}{2W}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\pi x-\frac{\omega}{2W}\right)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi} e^{2itWy}\frac{\sin\frac{2N+1}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y}dy \qquad \left(\pi x-\frac{\omega}{2W}=y \text{ とおく.}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi} e^{2itWy}\left(\frac{y}{\sin\frac{1}{2}y}-2\right)\frac{\sin\frac{2N+1}{2}y}{y}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi} 2e^{2\pi itWy}$$

$$\times\frac{\sin\frac{2N+1}{2}y}{y}dy$$

$$=\Psi_{N1}(\omega)+\Psi_{N2}(\omega).$$

今 $e^{2itWy}\left(\dfrac{y}{\sin\frac{1}{2}y}-2\right)=f_1(y)$, $2e^{2itWy}=f_2(y)$, $\displaystyle\int_0^y\frac{\sin y}{y}dy=g(y)$

とおく。そのとき

$$\Psi_{Ni}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[f_i(y)g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)\right]_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi} g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)f_i'(y)dy$$

をうる。　第一項については, $g(y)$ が y に関して有界である事は前に注意した。　故に $g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)$ は N に関して一様に有界. $y>0$ のとき $\lim_{N\to\infty}g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)=\frac{\pi}{2}$　　$y<0$ のとき,

$\lim_{N\to\infty}g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)=-\frac{\pi}{2}$　である.　$\left(\dfrac{y}{\sin\frac{1}{2}y}-2\right)$ は,

$-\frac{1}{2}-\pi\leq y\leq\frac{1}{2}+\pi$ で連続であるから, $\left|\dfrac{y}{\sin\frac{1}{2}y}-2\right|\leq M$ なる M がある。

故に $|f_1(y)|\leqq M$, $|f_2(y)|\leqq 2$　となり, 第一項は N, ω に関して一様に有界となる。

又 $-\frac{\omega}{2W}+\pi \geq -\frac{1}{2}+\pi > 0$, $-\frac{\omega}{2W}-\pi \leq \frac{1}{2}-\pi < 0$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[f_i(y)g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)\right]_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi}=\frac{1}{4}\left\{f_i\left(-\frac{\omega}{2W}+\pi\right)+f_i\left(-\frac{\omega}{2W}-\pi\right)\right\}$$

をうる。

第二項については， $g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)$ は前と同様に N, y に関して一様に有界，

$$\int_{-\frac{1}{2}-\pi}^{\frac{1}{2}+\pi}|f_i'(y)|\,dy < C$$

であるから，Lebesgue の収斂定理を用ひる事が出来て，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{2W}-\pi}^{-\frac{\omega}{2W}+\pi} g\left(\frac{2N+1}{2}y\right)f_i'(y)\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left\{f_i\left(-\frac{\omega}{2W}+\pi\right)-f(0)\right\}-\frac{\pi}{2}\left\{f_i(0)-f_i\left(-\frac{\omega}{2W}-\pi\right)\right\}\right].$$

以上をまとめると，$\Phi_N(\omega)$ が N, ω に関して一様有界であり，更に

$$\lim_{N\to\infty}\Phi_N(\omega)=\lim_{N\to\infty}\Phi_{N1}(\omega)+\lim_{N\to\infty}\Phi_{N2}(\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f_1(0)+f_2(0)\right),$$

$f_1(0)=0$, $f_2(0)=2$ なる事に注意すると，

$$\lim_{N\to\infty}\Phi_N(\omega)=1$$

を得る。

従って，Lebesgue の収斂定理を使って，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-W}^{W}\left|1-\Psi_N(\omega)\right|^2 d\sigma(\omega)=0$$

を生ずる。　故に

$$\lim_{N\to\infty}\left\| X(t)-\sum_{-N}^{N}X\left(\frac{\omega}{2W}\right)\varphi_n(t)\right\|^2=0$$

となり，(6) を生ずる。

終りに，本文を書くに当って，御指導頂いた飯谷清治氏に感謝の意を表する。