$$|x_1^{p_1}\cdots x_\alpha^{p_\alpha}x_{\alpha+1}^{q_1}\cdots x_{\alpha+\beta}^{q_\beta}| = x_1^{p_1}\cdots x_\alpha^{p_\alpha}x_{\alpha+1}^{q_1}\cdots x_{\alpha+\beta}^{q_\beta}\, sgn(x_1)\cdots sgn(x_\alpha)$$

と書き直して

$$\frac{\pi}{2}\, sgn(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ T\to\infty}}\left(\int_{-T}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{T}\right)\frac{e^{itx}}{2it}\,dt$$

を用いれば，

$$\frac{1}{i^{\alpha+\Sigma p+\Sigma q}\pi^\alpha}\int\cdots\int\frac{1}{t_1\cdots t_\alpha}\left[\frac{\partial^{\Sigma p+\Sigma q}\varphi(t_1,\cdots,t_{\alpha+\beta})}{\partial t_1^{p_1}\cdots\partial t_\alpha^{p_\alpha}\partial t_{\alpha+1}^{q_1}\cdots\partial t_{\alpha+\beta}^{q_\beta}}\right]_{t_{\alpha+1}=\cdots=t_{\alpha+\beta}=t} dt_1\cdots dt_\alpha$$

を計算することになる． 但しここの $\varphi(t_1,\cdots,t_{\alpha+\beta})$ は $x_1,\cdots,x_{\alpha+\beta}$ の特性函数であり，t に関する α 重の積分は上記の意味の Cauchy の主値をとるものとする。α≦3 ならば初等函数の範囲内でこの計算が行える。

筆者は $\alpha+\beta=3$ の場合にこの方法で正規分布の絶対積率を計算してある。

11. Asymptotic Properties Of Maximum Likelihood Estimates In The Case Of Several Unknown Prameters.

塩谷　実

Maximum Likelihood estimaters が一般に p 個ある場合 $n\to\infty$ の時 Consistent であり且つ Asymptotically normal であることはよく知られたことである。

しかし，Consistent であることの証明は Unknown Parameter が 1 個の時は Dugué, A. Wald の論文に見られるが一般

にp個在る場合のものは見かけない。

Duguéの場合，その直接的な拡張として一般の場合の証明が得られさうもないが Matrix notation を用いて結論に到達することが出来た。

定理として Duguéの場合の拡張を用ひた尤度聯立方程式

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \quad を$$

$$\theta = \theta_0 - B^{-1}a - \frac{1}{2}p^2 c\,|\theta - \theta_0|^2 B^{-1}\lambda$$

の行列表示を作つた。

此処で θ は p個の parametersの作るベクトル，θ_0 はその真の値に対するものである。

B は有限な要素をもつ p次の対称行列で B^{-1} はその逆行列である。　C は或る常数である。

λ は $0 < |\lambda_i| < 1$ なる λ_i の作るベクトルである。

此の様に得た尤度方程式に関して

$$\theta_\nu = \theta_0 - B^{-1}a - \frac{1}{2}p^2 c\,|\theta_{\nu-1} - \theta_0|^2 B^{-1}\lambda_{\nu-1}$$

によりベクトル系列 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$ を定義し $|\theta_1 - \theta_0|$, $|\theta_\nu - \theta_0|$, $|\theta_{\nu+1} - \theta_\nu|$ を評価することにより $\theta_1, \theta_2, \cdots$ が $n \to \infty$ の時1になる確率で

$$\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) + (\theta_2 - \theta_1) + \cdots$$

なる一定の極限に行くことを証明した。

此の一定の極限 θ が θ_0 に確率収斂することは容易に分り且つその様な尤度聯立方程式の解は確立1で唯一つであることも証明した。