⑭ Zero-sum two person game の別證明

稲 田 献 一

Zero-sum two person game Γ を考へる 参加者を I, II とする。

a_{ij} I が i の戦術を, II が j の戦術をとったとき II から I へ支払はれる実数とする ($i=1, \cdots, m$, $j=1, \cdots, n$)

mixed strategies

I が各戦術 i を probability $p_i \geq 0$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$) でとる

II が各戦術 j を probability $q_j \geq 0$ ($\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$) でとる

のを mixed strategy といふ。

I が mixed strategy $p = (p_1, p_2, \cdots p_m)$ をとり

II が mixed strategy $q = (q_1, q_2, \cdots q_m)$ をとる

このとき I の希望値は

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = K$$

I は K を max mize する様に p を選び II は $-K$ を maximize する様に q を選ぶ。I は自らのとる mixed strategy を II がとる mixed strategy による最悪の場合を出来るだけよくする様にとる。

$\mathrm{Min}\ \mathrm{Mase} \sum \sum a_{ij} p_i q_j$ なる値をとる P をとらうとする.

II についても同様となる.

このとき, $\underset{q}{\mathrm{Min}}\ \underset{p}{\mathrm{Max}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = \underset{p}{\mathrm{Max}}\ \underset{q}{\mathrm{Min}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ なる P, q の存在を証明する。左辺は II が如何なる mixed strategy をとるときでも $\sum \sum a_{ij} p_i q_j$ がとり得る最大値を表はして居る. 右辺は I が如何なる mixed strategy をとるときでも $\sum \sum a_{ij} p_i q_j$ がとり得る最小値を表はす。

定義から直ちに

$$\underset{q}{Min}\ \underset{p}{Max}\sum\sum a_{ij}p_iq_j \geqq \underset{q}{Min}\sum\sum a_{ij}p_iq_j$$

$$\underset{q}{Min}\ \underset{p}{Max}\sum\sum a_{ij}p_iq_j \geqq \underset{p}{Max}\ Min\sum\sum a_{ij}p_iq_j$$

従って $\leqq$ の証明すればよい。

$\underset{q}{Min}\ \underset{p}{Max}\sum\sum a_{ij}p_iq_j = v$ と置くと

或る q_0 に対し p_0（q_0 に依存する）を適当にとれば

$\sum\sum a_{ij}p_i^0q_j^0 \geqq v$ （$p_0=(p_1^0\cdots\cdots p_m^0)$, $q_0=(q_1^0\cdots\cdots q_n^0)$）

このとき すべての q に対し, q に依存しない p_1 が存在し

$\sum\sum a_{ij}p_iq_j \geqq v$

となることがいへれば

$$\underset{p}{Max}\ min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \geqq v$$

となり証明が完了する

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i = A_j \qquad A=(A_1,\cdots\cdots A_2)$$

$\alpha=\{A\}$ とすると $p_i\geqq 0$ $\sum p_i = 1$ であるから

α は *bounded closed convex* となる。

$V=(v,\cdots\cdots,v)$ とし

$\{A-v\}=\alpha'$ とすると $A-V=A'$

α' は *bounded closed convex* となる

扨 q_0 に対し p_0 が存在し

$\sum a_{ij}p_i^0q_j^0 \geqq v$ であるから

$$\sum_{i=1}^{n} A_j^0 q_j^0 \geqq v \qquad \therefore \sum_{j=1}^{n}(A_j^0-v)q_j^0 \geqq 0$$

即ち q_0 に対し 上の式を充す $A_0'=(A_1^0-v,\cdots\cdots A_n^0-v)$ が存在する。

故に次の定理

「 $D\ni d=(d_1,\cdots d_n)$

bounded closed convex, $Q=\{g\}$ $g=(g_1,\cdots g_n)$

$g_i\geqq 0$ $\sum_{i=1}^{n} g_i=1$ 任意の $g_0\in Q$ に対し, d_0 が存在し.

$\sum_{i=1}^{n} d_i^0 g_i^0 \geqq 0$ ならば

すべての $g\in Q$ に対し, d(g に依存せざる) が存在し,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i g_i \geqq 0$$

である」

に依りすべての g に対し, A'(g に依存せざる) が存在し,

$$\sum_{i=1}^{n} A'_i\, g_i \geqq 0$$

即ち $\sum_{i=1}^{n}(A_i-v)g_i \geqq 0$ 故に $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{in} P_i g_j \geqq v$ なる

$p=(P_1\cdots P_n)$ が存在する. 依って証明された

次に上の定理を証明する.

Lemma $l_n^2 \supset A \ni \alpha=(a_1,\cdots\cdots a_n)$

$l_n^2 \supset B \ni \beta=(b_1,\cdots\cdots b_n)$

A, B, closed convex 一方が bounded とすると

$(x_1,\cdots x_n)$ α, を選び

$$\sum a_i x_i > \alpha$$
$$\sum b_i x_i < \alpha$$

ならしめ得る.

$\because$ $d(A,B)=\|\alpha_0-\beta_0\|$ $\alpha_0\in A$, $\beta_0\in B$ なる α_0

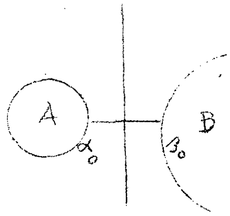
β_0 が存在する.

(A, B closed で一方が bounded であるから)

$\ell = \alpha_0 - \beta_0$

$$\alpha = \frac{(\alpha_0+\beta_0,\ \alpha_0-\beta_0)}{2}$$

にとればよい



$\alpha' \in A$

$(\alpha', \alpha_0-\beta_0) \leqq \alpha$ とすると

$(\lambda\alpha' + (1-\lambda)\alpha_0 - \beta_0,\ \lambda\alpha'+(1-\lambda)\alpha_0-\beta_0)$

$= (\lambda(\alpha'-\alpha_0)+\alpha_0-\beta_0,\ \lambda(\alpha'-\alpha_0)+\alpha_0-\beta_0)$

$= \lambda^2(\alpha'-\alpha_0, \alpha'-\alpha_0) + 2\lambda(\alpha'-\alpha_0, \alpha_0-\beta_0) + (\alpha_0-\beta_0, \alpha_0-\beta_0)$

$$0 < \lambda < \mathrm{Min}\left(-\frac{2(\alpha'-\alpha_0,\ \alpha_0-\beta_0)}{\|\alpha'-\alpha_0\|},\ 1\right)$$

$$[(\alpha'-\alpha_0,\ \alpha_0-\beta_0) < 0]$$

とすると $\lambda\alpha' + (1-\lambda)\alpha_0 \in A$ (A convex) 且つ

$< (\alpha_0-\beta_0,\ \alpha_0-\beta_0)$

故に $\delta(A, B) = \|\alpha_0-\beta_0\|$ に矛盾する

$\therefore$ $\alpha'\in A \to (\alpha', \alpha_0-\beta_0) > \alpha$ 同様にして

$\beta' \in B \Rightarrow (\beta', \alpha_0-\beta_0) < \alpha$ となる

定理の証明

$Q = \{q\}$ $q=(q_1 \cdots q_n)$ $q_i \geqq 0$ $\sum q_i = 1$ の代りに

$Q' = \{q'\}$ $q' = (q'_1, \dots, q'_n)$ $q'_i \geqq 0$ を考へる

$X = \{x \mid \sum x_i q'_i \geqq 0 \quad q' \in Q'\}$ とする

Q' は closed convex となる

X も又 closed convex なることは容易にわかる

$D \wedge X = 0$ とすると Lemma から (D bounded)

$z' = (z'_1, \dots, z'_n)\ \alpha$ が存在し

$\sum z'_i x_i > \alpha$

$\sum z'_i d_i < \alpha$　となる　$X \ni (0 \cdots\cdots 0)$ より　$\alpha \leqq 0$

$\alpha < 0$ とすると，$z' \in Q'$ なら　すべての d に対し $\sum z'_i d_i < 0$

となり假設に反す（$Q \ni z$　に対し，$\sum z_i d_i \geqq 0$　となるなら，

$Q' \ni z'$　に対しても，$\sum z'_i d_i \geqq 0$ なる d が存在する）．

$z' \notin Q'$　ならば　$z'_{j_0} < 0$　となる

$$x_{j_0} > \frac{\alpha}{z'_{j_0}} \quad x_i = 0 \ (i \neq j_0) \text{ なる } x \text{ に対し} (x \in X)$$

$\sum x_i z'_i < \alpha$　となり矛盾

依って証明された。