I　第一部

1. t. F の joint distribution に就いて

藤本　熙

二つの normal distribution $N(m_1, \sigma_1^2), N(m_2, \sigma_2^2)$ よりの sample を夫々 $x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots x_{1n_1}$, $x_{21}, x_{22} \cdots x_{2n_2}$ とする。

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}\sum_1^{n_\alpha} x_{\alpha i} \qquad \alpha = 1, 2$$

$$n_\alpha s_\alpha^2 = \sum_1^{n_\alpha}(x_{\alpha i} - \bar{x}_\alpha)^2$$

$$F = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\cdot\frac{n_1 s_1^2}{n_2 s_2^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}\cdot\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}}$$

とおくとき joint dist. の prob. element は const. を無視して次の如くなる。

$$f(t, F)\,dt\,dF = F^{\frac{n_1-3}{2}}\left(1 + \frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{n_1 n_2 t^2}{K^2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)}\right)\frac{n_1-1}{n_2-1}F + \left(\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{n_1 n_2 t^2}{K^2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_2^2}\right)}\right)\right]^{-\frac{n_1+n_2-1}{2}} dt\,dF$$

但し $K^2 = \dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}$

茲で若し $\sigma_1 = \sigma_2$ ならば；

$$f(t,F)\,dt\,dF = \frac{1}{\sigma^2}\underbrace{\left(1+\frac{t^2}{n_1+n_2-2}\right)^{-\frac{n_1+n_2-1}{2}}dt}_{\substack{\text{d.o.f.}(n_1+n_2-2)\text{ の}\\ \text{Student's t-dist.}}}\ \underbrace{F^{\frac{n_1-3}{2}}\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}+1}dF}_{\substack{\text{d.o.f.}(n_1-1,\ n_2-1)\text{ の}\\ \text{Snedecor's F-dist.}}}$$

である。

処で $\sigma_1 \neq \sigma_2$ なる場合次の様な conditional prob. を考えて見ようとする。 即ち

$$f(t) = \frac{\displaystyle\int_0^{F(0.05)} f(t,F)\,dF}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{F(0.05)} f(t,F)\,dt\,dF}$$

目的は茲で $1-\displaystyle\int_{-t_{0.05}}^{t_{0.05}} f(t)\,dt \doteqdot 0.05$ の近似度を見ようとするのであるが， $\sigma_2 = \lambda\sigma_1 = \lambda\sigma$ として

$$1-\int_{-t_{0.05}}^{t_{0.05}} f(t)\,dt = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)+\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}{\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)t_{0.05}+\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)+\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}} y^{\frac{n_1+n_2-2}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy}{\displaystyle\int_0^1 y^{\frac{n_1+n_2-2}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy}$$

$$= I\left(\frac{n_1+n_2-2}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)+\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}{\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)t_{0.05}+\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)+\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}\right)$$

これは K. Pearson の incomplete Beta function の table によつて直ぐに計算出来る。

この課題は大阪大学数教室の小川潤次郎先生によつて提示されたものである。