2. 確率過程の一応用

渡辺　壽夫

1. 1951. No.2 A.M.S の W. Feller の論文に於いて，水面の Flactuation について，確率過程の考えを応用してその Range について考察しておるが，それは Model になつておるのは，Wiener-Bachelier の Process である。

しかし，これは更に一般の場合にも，Markoff Process と考えるとき適用されることが分る。

2. 次に，貯水池について，水の入つてくる量を，Wiener-Bachelier の Process と考えて，一定量の貯水にもかゝわらず渇水する確率を計算することが出来る。

それは吸収壁を有する Random Walk の考えを使うと計算することが出来る。

しかし計算は複雑でこの結果で実際の問題は解くことは出来ないが，一つの目安位にはなると思はれる。

3. Dispersion と Variance との間の一関係について

森村　英典

Lévy が導入した dispersion（最大濃度函数の逆函数）は，Variance の代用として，特に Variance の存在しない時に用いられる。所で Variance が存在するような確率変数列の和について，dispersion と Variance との或る関係を平均濃度函数の場合について国沢先生が注意されている。（Kôdai Math. Sem. Rep., Vol. 3, No. 3-4, 1951）。これと analogous な結果を最大濃度函数の場合に求めてみた。

［定理］　$X_1, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots$ を個々に無視可能な独立確率

変数列で夫々有限な分散 σ_k^2 を持っているとする。

今 $v_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots\cdots + \sigma_n^2$ とし，$D_n(\alpha)$ を $\sum_1^n X_k$ の確率 α に対する *dispersion* とするならば，

$$K \leqq \frac{v_n}{D_n(\alpha)} \leqq K'$$

なる常数 K, K'（α にのみ関係する）が存在するための必十條件は，$0 < \eta < 1$ に対し

$$\sum_1^n \left\{ \int_\eta^\infty x(1 - F_k(D_n x))\,dx - \int_{-\infty}^{-\eta} x F_k(D_n x)\,dx \right\}$$

が n に関して一様に有界なことである。

証明には，W. Doeblin, Sur les Sommes d'un grand Nombre de Variables Aléatoires Indépendentes, Bull. des Sci. Math., 2^e série, t. LXIII (1939) のII，§ 2 にある Lemma 1, 2 を用いる。 必要性は A を適当に大きな常数とし

$$2\left\{ \int_\eta^{A/D_n} x(1 - F_k(D_n x))\,dx - \int_{-A/D_n}^{-\eta} x F_k(D_n x)\,dx \right\}$$

を部分積分と Tchebyschev の不等式を用いて評価し，$A \to \infty$ とすると得られる。 十分性は

$$\frac{v_n^2}{D_n^2} = \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{-\eta D_n}^{\eta D_n} x^2\,dF_k(x) + \int_{|x| \geqq \eta D_n} x^2\,dF_k(x) \right\}$$

とし，第2項は $A > |x| \geqq \eta D_n$ の範囲で部分積分を行い，Tchebyscher の不等式と Lemma 1 とを用いる。 第1項は $E(X_k) = 0$ として，Schwartz の不等式から

$$\left\{ \int_{|x| \leqq D_n} x\,dF_k(x) \right\}^2 = \left\{ \int_{|x| > D_n} x\,dF_k(x) \right\}^2 < P_r\{|X_k| > D_n\} \int_{|x| > D_n} x^2\,dF_k(x)$$

$$< \int_{|x| > \eta D_n} x^2\,dF_k(x)$$

となるからこゝに前の結果と Lemma 2 とを用いて評価する.

下方に有界なことは dispersion の定義と Tchebyscheo の不等式から簡単に出る。

平均濃度函数の場合と異る点は必十條件の式の型が少し変り，α に対する制限がなくなったことである。

4. Elementary processes と推定論について

風見 秋子

Time series の様に互に相関ある data $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ から，これ等の分布に関する parameter α（但し α は n に，depend しないものとする）を推定する問題を，独立な Sample における古典的な推定法の応用として取扱う。

1. $x_1, \cdots\cdots, x_n$ の frequency を $f(x_1, \cdots\cdots, x_n : \alpha)$ とすると適当な regularity condition のもとに α の推定値 $\alpha^*(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ の variance に関して次の不等式が成立つ.

$$E(\alpha^* - \alpha)^2 \geqq 1 + \frac{db(\alpha)}{d\alpha} \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \log f(x_1, \cdots x_n : \alpha) \right)^2 f(x_1, \cdots x_n : \alpha) dx_1 \cdots dx$$

efficiency の定義等も同様である。

2. $\{x_n\}$ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ が Stationary Markoff process of order k ($k \geqq 1$) で且つ ergodic ならば. Maximum likelihood estimate は，ある regularity の仮定のもとに，consistent 且つ asymptotically efficient な estimate となる.

更に Normal process ならばその極限分布はやはり Normal となる。

3. Moment に対する estimate としては ergodic theorem が有用な手段として用ひられるが，これは一般に estimate の