(25) # 計量計画について

稲田献一

問題の設定　天秤で数ヶのものの量を計る場合に一つづつはかる代りに幾つかをまとめて計量することにより正確さを増し又経費を削減することが出来る場合が屡々ある。天秤による質量又は重量の測定だけでなく長さ，面積，容積等の量の測定にも用ひられよう。しかし以下には天秤特に化学天秤による質量測定として問題を考察しよう。

先づ F. Yates の例を示さう。

計量すべき対象が7ヶ，及び bias の修正を必要としよう。従つて合せて8ヶの量を estimate する。従つて最小限8回の計量操作を必要とする，又次の如き假定を置く。

各計量操作に於ける標準誤差をσ，即ち variance をσ^2とする。この假定の当，不当は一応論矣の外に置いて考察しよう。

未知の質量をa,b,c,d,e,f,gとし，y_iをi番目の測定結果とす。7ヶ全部一諸にはかる，又3つづゝまとめて次の様にはかる。

$$a+b+c+d+e+f+g = y_1+\varepsilon_1$$

$$a+b+c = y_2+\varepsilon_2$$

$$a+d+e = y_3+\varepsilon_3$$

$$a+f+g = y_4+\varepsilon_4$$

$$b+d+f = y_5+\varepsilon_5$$

$$b \qquad + e \qquad + g = y_6 + \varepsilon_6$$
$$c + d \qquad + g = y_7 + \varepsilon_7$$
$$c \qquad + e + f \qquad = y_8 + \varepsilon_8$$

bias は y_i の中に常に一定に入って居る。

$$\hat{a} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8}{4}$$

と estimate する。

そのときの variance は容易にわかる様に $\sigma^2/2$ となる。

即ち個々に計量して estimate する場合に比して variance は半分になる。

これは化学天秤でなくバネ秤りの場合にも可能である。しかし特に化学天秤の場合には右の皿に $a, b, c,$ ------- の中の幾つかをのせ左の皿にいくつかをのせるとして計量すれば更に variance を小にすることが出来る。

即ち次の様にする。

$$a + b + c + d + e + f + g = z_1 + \varepsilon_1$$
$$a + b + c - d - e - f - g = z_2 + \varepsilon_2$$
$$a - b - c + d + e - f - g = z_3 + \varepsilon_3$$
$$a - b - c - d - e + f + g = z_4 + \varepsilon_4$$
$$-a + b - c + d - e + f - g = z_5 + \varepsilon_5$$
$$-a + b - c - d + e - f + g = z_6 + \varepsilon_6$$
$$-a - b + c + d - e - f + g = z_7 + \varepsilon_7$$
$$-a - b + c - d + e + f - g = z_8 + \varepsilon_8$$

$$\hat{a} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 - Z_5 - Z_6 - Z_7 - Z_8}{8}$$

と estimateする。

そのときの varianceは $\sigma^2/8$ となる。

即ち個々に計量して estimate する場合に比して variance は $1/8$ になる。

扨，問題の一般化は M. Mood によることにする。

測定すべき対象の数を p ，その眞の質量を $b_1, \cdots\cdots, b_p$ とす。

計量操作の回数を $N(\geq p)$ とす。

右の皿へのせるときは $+1$ ，左の皿にのせるときは -1 ，どちらへものせないときは 0 と書き表はす。

例へば $p=3$. $N=4$ として，1回目の計量操作に於て，aを右へ，bを左へ，cをどちらへものせないのを $1. -1. 0$，aを右へ b, c を左へのせるのを $1\ -1. -1$，aを左へcを右へ，bをどちらへものせないのを $-1. 0. 1$．　a, b, c 全部を右へのせるのを $1. 1. 1$ と書く。

以上の様な計量操作の計画を次の如き Matrix で書き表はす。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

かゝる Matrix を design Matrix といふ。

扨 X design Matrix

$$X = \| x_{\alpha i} \| \qquad x_{\alpha i} = \pm 1, 0, \quad \alpha = 1, \cdots, N, \quad i = 1, \cdots, p$$

$$X'X = \| a_{ij} \| = \| a^{ij} \|^{-1}$$

$g_i = \sum_{\alpha} x_{\alpha i} y_{\alpha}$ と置く．

y_α は α 番目の操作の観察結果である。
最小二乗法により b_i を estimate すると，

$$\hat{b}_i = \sum_j a^{ij} g_j$$

$\because$ $\sum_\alpha (\sum_i x_{\alpha i} b_i - y_\alpha)^2$ を b_j で微分する。

$$\sum_\alpha x_{\alpha j} (\sum_i x_{\alpha i} \hat{b}_i - y_\alpha) = 0$$

$$\sum_\alpha x_{\alpha j} \sum_i x_{\alpha i} \hat{b}_i - \sum_\alpha x_{\alpha j} y_\alpha = 0$$

$$\sum_i \sum_\alpha x_{\alpha j} x_{\alpha i} \hat{b}_i - g_j = 0,$$

$$\sum_i a^{ji} \hat{b}_i - g_j = 0$$

$$\hat{b}_i = \sum_j a^{ij} g_j$$

又この estimate の variance は $\sigma_i^2 = a^{ii} \sigma^2$

$$\hat{b}_i = \sum_j a^{ij} g_j = \sum_j a^{ij} \sum_\alpha x_{\alpha j} y_\alpha$$

$$= \sum_j \sum_\alpha a^{ij} x_{\alpha j} y_\alpha$$

$$= \sum_\alpha \sum_j a^{ij} x_{\alpha j} y_\alpha$$

$$\sigma_i^2 = \sum_\alpha (\sum_j a^{ij} x_{\alpha j})^2 \sigma^2$$

$$= \sum_\alpha (\sum_j a^{ij} x_{\alpha j} \sum_k a^{ik} x_{\alpha k}) \sigma^2$$

$$= (\sum_j \sum_k a^{ij} a^{ik} \sum x_{\alpha j} x_{\alpha k}) \sigma^2$$

$$= (\sum_j \sum_k a^{ij} a^{ik} a_{jk}) \sigma^2$$

$$= (\sum_j a^{ij} \sum_k a^{ik} a_{jk}) \sigma^2$$

$$= (\sum_j a^{ij} \delta_{ij}) \sigma^2$$

$= a^{ii}\sigma^2$

Hotellingは $a^{ii} \geq 1/N$ を示した。

従つて b_i の estimate の variance は $1/N\,\sigma^2$ より小にはなり得ない。そこでもし，すべての i について $a^{ii} = \frac{1}{N}$ になる様な design matrix が存在すればそれが最もよい即ち estimate の variance が最小といふ意味で最良の design である。

Hotelling は特定の i について $a^{ii} = \frac{1}{N}$ ならしめ得ることを示した。扨，すべての i について $a^{ii} = \frac{1}{N}$ なる様な matrix をもつ design を optimum な design と呼ぶ。

N, p のすべての値について optimum design が存在するとは限らぬ。我々の問題は如何に design matrix をきめたならば出来るだけ誤差の範囲を小さくすることが出来るかといふことになると思はれる。従つて如何にしたら variance $a^{ii}\sigma^2$ を小さくすることが出来るかを考へることになる。

問題の解決　我々の問題は非常に複雑である様に思はれる。一般的な簡潔な形で解を得ることは困難の様に思はれる。

唯，特殊な場合については optimum design が見出されるけれども他の場合は optimum design が存在せぬために果して如何なる design が最良であるかを判定することすら着眼点の相違に依つて異なるであらう。

扨 optimum design の存在は Hadamard Matrix と極めて密接な関係がある。

Hadamard Matrix については次の定理が成立する。

正方行列 X の要素 $x_{\alpha\beta}$，$-1 \leq x_{\alpha\beta} \leq 1$ とするとき X の determinant の最大可能値は $N^{\frac{1}{2}N}$ であり，$x_{\alpha\beta} = \pm 1$ で $X'X$ が diagonal matrix であるといふ意味で直交して居るときに，

即ち一つの列が他の列と直交する。$\sum_{\alpha} x_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta'} = 0 \ (\beta \neq \beta')$ のときにこの値をとる。

かゝる matrix を H_N と書く。 $N=2,\ 4$ の場合の例を示すと

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

H_N の存在の必要條件は $N \equiv 0 \pmod 4$ 但し $N=2$ は例外。実際に $0 < 4k \leq 100$（92だけ除いた）の $N=4k$ の Hadamard Matrix は Plackett and J. P. Burmann が示して居る。

1. $N \equiv 0 \pmod 4$, H_N が存在するとき、optimum design として H_N から任意の p 列を選んで $N-p$ 行列をつくればよい。この場合容易に $a^{ii} = 1/N$ となることがわかる。

2. $N \equiv 1 \pmod 4$ H_{N-1} が存在するとき H_{N-1} から p 列選び $N-1,\ p$ 行列をつくり更に1ばかりからなる行を追加する。この時の a^{ii} を計算すると

$$\frac{1}{N} < a^{ii} = \frac{N+p-2}{(N-1)(N+p-1)} < \frac{1}{N-1}$$

非常に有効な design matrix であるといへよう。

3. $N \equiv 2 \pmod 4$ H_{N-2} が存在するとき H_{N-2} から p 列選び $N-2,\ p$ 行列をつくり、更に1ばかりからなる行と1と-1の交互に出てくる行とを附加する。 p が偶数なら

$$\frac{1}{N} < a^{ii} = \frac{N+p-4}{(N-2)(N+p-2)} < \frac{1}{N-2}$$

p が奇数なら

$$\frac{1}{N} < a^{ii} = \frac{N+p-3}{(N-2)(N+p-1)} < \frac{1}{N-2}$$

となる。M. Mood の様に1ばかりの行を2行附加すると

$$a^{ii} = \frac{N+2p-4}{(N-2)(N+2p-2)} \quad \text{となり}$$

$$\frac{N+p-4}{(N-2)(N+p-2)} < \frac{N+2p-4}{(N-2)(N+2p-2)}$$

又

$$\frac{N+p-3}{(N-2)(N+p-1)} < \frac{N+2p-4}{(N-2)(N+2p-2)} \quad \text{となり}$$

前者の design の方が後者より有効であることがわかる。

3. $N \equiv 3 \pmod 4$ H_{N+1} が存在するとき H_{N+1} から p 列選び $N+1-p$ 行列を作りその中から任意の一行を抜いた matrix をつくる。

$$a^{ii} = \frac{N-p+2}{(N+1)(N-p+1)} \leq \frac{2}{N+1}$$

M. Mood は2に於ける variance の方が3の variance より大きい様に述べて居るが N と p との差が小なるときはむしろ2の方がよいことがわかる。

しかし N が p に対して自由に選択することが出来るならば（実験回数をきめる）N を H_N が存在する様にとるならば optimum design が存在し，労力に比して variance を小ならしめることに成功するであらう。

しかし，経費，時間，その他の事情で $N=p$ でなければならない場合に於ける有効な design を見出さう。

1. $p+1=4n$，H_{4n} が存在するとき H_{4n} から一列一行を抜いた matrix をつくる。

$$\bar{a}^{ii} = \frac{2}{p+1}$$

2. $p+2=4n$ H_{4n}が存在するとき H_{4n}から二列二行を抜いた matrixをつくる。抜いた二列の中同符号の要素の数がk，異符号の要素の数がlであるとすると

$$a^{ii}=\frac{p-2l+4}{(p+2)(p-2l+4)} \quad \text{（抜いた二列の}i\text{番目が異符号）}$$

$$a^{ii}=\frac{p-2k+4}{(p+2)(p-2k+2)} \quad \text{（抜いた二列の}i\text{番目が同符号）}$$

$$\therefore \quad a^{ii} < \frac{2}{p+2}$$

3. $p+3=4n$. H_{4n}が存在するとき H_{4n}から三列三行を抜いた matrixをつくる。抜いた三列の中 $+++$ の行の数をk_2，$+-+$の行の数をk_3，$-++$の行の数をk_4，$+--$の行の数をk_5，$-+-$の行の数をk_6，$--+$の行の数をk_7，$---$の行の数をk_8とする。

$$a^{ii}=\frac{p-3(k_4+k_5-2)}{(p+3)(p-3(k_4+k_5-1))}$$ 抜いた三列のi番目の行が$-++$，$+--$のとき

$$=\frac{p-3(k_2+k_6-2)}{(p+3)(p-3(k_3+k_6-1))}$$ 〃 $+-+$，$-+-$ 〃

$$=\frac{p-3(k_2+k_7-2)}{(p+3)(p-3(k_2+k_7-1))}$$ 〃 $++-$，$--+$ 〃

$$=\frac{p-3(k_1+k_8-2)}{(p+3)(p-3(k_1+k_8-1))}$$ 〃 $+++$，$---$ 〃

M. Mood は best design を質量の estimate の信頼域を最小ならしめる design 即ち $|a_{ij}|$ を maximum ならしめる design として定義して居るが如何にこの best design を見出すべきかは

論じて居ない。しかし，実例を挙げて居る。この場合も Hadamard matrix が存在すれば問題はない。

以上に依り，化学天秤による計量操作に於ては若し各操作に於ける variance が一定であれば Hadamard matrix が存在せぬときは或る Hadamard matrix から行，列を抜き，又は追加したりして optimum design は見出せないにしても非常に有効な design を見出し得ることがわかった。

次に各計量操作に於ける variance が一定といふ假定のない場合に果して如何なる計量方法が有用であるかを考へよう。次の如き假定を代りに置く。両皿の中重い方の true value を b とするとその計量操作に依つて生ずる variance を $f(b)\sigma^2$ とし，$f(b)$ は monotone increasing 且つ convex としよう。

扨，前と同一の記号を用ひる。

design matrix $X=\|x_{\alpha i}\|$ $x_{\alpha i}=\pm 1,\ 0,\ \alpha=1\text{---}N,$ $i=1,\text{-----},p.$ $\sum_k x_{\alpha k}^2 k_k$ が分銅をのせない場合の両皿にのる対象の true value の和，両皿にのる対象の true value の差は $|\sum x_{\alpha k} b_k|$

従って重い方の true value は $(\sum_k x_{\alpha k}^2 b_k+|\sum_k x_{\alpha k} b_k|)/2$ となる。

$$\hat{b}_i=\sum_\alpha\sum_j a^{ij}x_{\alpha j}y_\alpha$$

この b_i の estimate の variance を出す。

$$\sigma_i^2=\sum_\alpha\left[(\sum_j a^{ij}x_{\alpha j})^2 f\left((\sum_k x_{\alpha k}^2 b_k-\left|\sum_k x_{\alpha k}\ b_k\right|)/2\right)\right]\sigma^2$$

依つてこの variance を minimum ならしめる様に $x_{\alpha i}=1,0,-1$ を選べばよい。しかし式からわかる様にこの値は f の形 b_k に依存して居る。(b_k は true value であるから計量の前にこれを知ることは出來ない計量後と雖も不可能かも知れない。

又 f は天秤により，実験者により，又天候，氣温，氣圧，濕度等にも左右されるであらう。） 故

$$\left(\sum x_{\alpha k}^2 b_k + \left| \sum x_{\alpha k} b_k \right| \right) / 2 \leqq \sum_k b_k$$

であるから，

$$\sigma_i^2 < \sigma^2 \sum_\alpha \left[\left(\sum_j a^{ij} x_{ij} \right)^2 f\left(\sum_k b_k \right) \right]$$

α のすべての値に対して $\sum_k b_k = \sum x_{\alpha k}^2 b_k = \sum x_{\alpha k} b_k$ となるとすると， $x_{\alpha k} = 1$ （すべての k について）又は -1（すべての k について）すると

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots\cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{Vmatrix}$$

の如くなり rank が 1 となり b_i を estimate することは出來ない。

次に f は convex であるから

$$\sigma^2 \sum_\alpha \left[\left(\sum_j a^{ij} x_{ij} \right)^2 f\left(\sum_k b_k \right) \right]$$

$$\leqq \sigma^2 \sum_\alpha \left(\sum_j a^{ij} x_{ij} \right)^2 \sum_k f(b_k)$$

$$= a^{ii} \sigma^2 \left(\sum_k f(b_k) \right)$$

依って variance の限界を $a^{ii} \sigma^2 \left(\sum_k f(b_k) \right)$ 以下に止めることが出來る。

$\sigma^2 f(b_k)$ は b_k 一ヶだけ計量するときの variance である。我々は前に考へたことは a^{ii} を小にすることであった。依ってその結果をこゝで用ひることも出來る。

又実際には $a^{ii} \sigma^2 \left(\sum_k f(b_k) \right)$ よりもずっと variance は小さくなると考へられる。

$(\sum x_{\alpha k}^2 b_k + |\sum x_{\alpha k} x_k|)/2$ は $\| x_{\alpha k} \|$ が Hadamard matrix 又はそれから列，行等を抜いたり又は追加してりして出来た matrix であれば，α の値に依つて $\sum_k b_k$ との差が相当に大きくなるであらう。　又 f の convex の程度に依つても左右される。

f の形や b の値が大略わかつて居るときにはきつとよい操作が存在するであらう。　唯，式の形からいひ得ることは

$$(\sum_k x_{\alpha k}^2 b_k + |\sum x_{\alpha k} x_k|)/2$$

を小にすること，及び $(\sum a^{ij} x_{\alpha j})^2$ を小にすることが望ましい。しかし，その両者の操作は独立ではないので一方を小にすれば他方が大になるかも知れず逆に他方を小にすれば一方が小になるかも知れない，そしてこゝにこの問題の困難性がある様に思はれる。

$(\sum_k x_{\alpha k}^2 b_k + |\sum x_{\alpha k} b_k|)/2$ を小にするといふことは一方の皿に余り重いものをのせないといふことである。

従つて，一つづゝはかるのがよいことにならう。しかし，$(\sum a^{ij} x_{\alpha j})^2$ を小にするには幾つかをまとめる方がよい。

この故に Hadamard Matrix の様に全部を両方の皿にのせるのが必ずしもよいとはいへないけれども variance が平均化する点が有用と考へられる。

簡単な場合の例を考へよう。

$$p = 2 \qquad N = 2 \qquad b_1 > b_2$$ とする。

design matrix

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$ とする　　f が linear homogeneous とする。

$$x_{11} b_1 + x_{12} b_2 = y_1 + \varepsilon_1 \qquad \frac{1}{2}[x_{11}^2 b_1 + x_{12}^2 b_2 + |x_{11} b_1 + x_{12} b_2|]\sigma^2$$

$$x_{21} b_1 + x_{22} b_2 = y_2 + \varepsilon_2 \qquad \frac{1}{2}[x_{21}^2 b_1 + x_{22}^2 b_2 + |x_{21} b_1 + x_{22} b_2|]\sigma^2$$

b_1, b_2 を estimate する。

$$\hat{b}_1 = \frac{x_{22} y_1 - x_{12} y_2}{x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{x_{11} y_2 - x_{21} y_1}{x_{11} x_{22} - x_{12} y_{21}}$$

依って.

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 \frac{x_{22}^2 [x_{11}^2 b_1 + x_{12}^2 b_2 + |x_{11} b_1 + x_{12} b_2|] + x_{12}^2 [x_{21}^2 b_1 + x_{22}^2 b_2 + |x_{21} b_1 + x_{22} b_2|]}{2 (x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21})^2}$$

$$\sigma_2^2 = \sigma^2 \frac{x_{11}^2 [x_{21}^2 b_1 + x_{22}^2 b_2 + |x_{21} + x_{22} b_2|] + x_{21}^2 [x_{11}^2 + x_{12}^2 b_2 + |x_{11} b_1 + x_{12} b_2|]}{2 (x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21})^2}$$

I $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1^2 = \frac{2b_1 + b_2}{4} \sigma^2$, $\quad \sigma_2^2 = \frac{2b_1 + b_2}{4} \sigma^2$

II $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1^2 = b_1 \sigma^2$, $\quad \sigma_2^2 = (2b_1 + b_2) \sigma^2$

III $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1^2 = b_1 \sigma^2$, $\quad \sigma_2^2 = 2b_1 \sigma^2$

IV $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1^2 = (b_1 + b_2) \sigma^2$, $\quad \sigma_2^2 = b_2 \sigma^2$

V $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1^2 = b_1 \sigma^2$, $\quad \sigma_2^2 = b_2 \sigma^2$

容易にわかる様に, II. III. IV. はVより悪い.

$\frac{2b_1 + b_2}{4} < b_1, b_2$ であれば, IはVよりよい.

$\frac{2b_1 + b_2}{4} > b_1, b_2$ となることはない。依つて I をとれば V よりも常に variance が大きいわけではない。$\hat{b}_1$ の variance が V で計量するときに出る variance より小さい。

b の大いさに何等の知識がないときはこれに依るのがよい様に思はれる。$b_1 \fallingdotseq b_2$ であれば variance は大略 $\frac{3}{4}$ になる。

I は $N=2$ の場合の Hadamard matrix である。

三次の場合について上と同様のことは可能であるが余りに錯雑となるであらう。

$b=3$ の場合の特殊の design matrix についてしらべる。

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_i + b_j > b_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = y_1 + \varepsilon_1 \qquad (b_1 + b_2 + b_3)\,\sigma^2$$

$$b_1 - b_2 + b_3 = y_2 + \varepsilon_2 \qquad (b_1 + b_3)\,\sigma^2$$

$$b_1 + b_2 - b_3 = y_3 + \varepsilon_3 \qquad (b_1 + b_2)\,\sigma^2$$

$$-b_1 + b_2 + b_3 = y_4 + \varepsilon_4 \qquad (b_2 + b_3)\,\sigma^2$$

最小二乗法により b_i を estimate する。

$$\hat{b}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 - y_4}{4}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{y_1 + y_3 + y_4 - y_2}{4}$$

$$\hat{b}_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_4 - y_3}{4}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{16}\,\sigma^2\,(b_1 + b_2 + b_3)$$

又、

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{y_1 + y_4}{2} \qquad \sigma_1^2 = \frac{b_1}{2}\sigma^2$$

$$\hat{b}_2 = y_2 \qquad \sigma_2^2 = b_2\sigma^2$$

$$\hat{b}_3 = y_3 \qquad \sigma_3^2 = b_3\sigma^2$$

今 $\frac{3}{16}(b_1+b_2+b_3) < \frac{1}{2}b_1,\ b_2,\ b_3$ であれば、前者の方が後者よりよい。しかし

$$\frac{3}{16}(b_1+b_2+b_3) > \frac{1}{2}b_1,\ b_2,\ b_3$$ となることはない。

∵ 若し然りとすると、

$$b_2 + b_3 > \frac{5}{3}b_1 \quad 又 \quad b_1 + b_2 > \frac{13}{3}b_3, \quad b_1 + b_3 > \frac{13}{3}b_2$$

$$\therefore\ 2b_1 > \frac{10}{3}(b_2+b_3) \quad \therefore\ b_1 > \frac{5}{3}(b_2+b_3) \quad \therefore\ \frac{3}{5}b_1 > b_2+b_3$$

$$\therefore\ \frac{3}{5}b_1 > b_2 + b_3 > \frac{5}{3}b_1,$$ となり矛盾

依つて後者より前者が悪いことはない。

従つて、前者の design に依るときには後者の design によつて出る最大の variance よりは小さい variance が出る。

$b_1/2 \fallingdotseq b_2 \fallingdotseq b_3$ であれば前者は後者の $3/4$ 程度の variance をもつ。（前者の matrix は Hadamard matrix から一列抜いたものである。）

我々の問題は非常に面倒な計算をくり返すことにより，更によい design を見つけることが出来る。

しかし一般的には簡単な公式で示すことは出来ない様に思はれる，以下に参考文献を挙げる．

: Harold Hotelling. "Some Improvements in weighing and other experimental techniques," Annals of Math. Stat. Vol 15 (1944)

: M. Mood "On Hotelling's weighing problem" Annals of Math. Stat. Vol. 17 (1946)

: F. Yates. "Complex experiment," Jour. Roy. Stat. Soc. Suppl. Vol. 2 (1935) pp. 181−247 page 211.

: R.L. Plackett and J.P. Burman. "The design of optimum multifactorial experiments" Biometrica Vol 33 (1946) pp. 305−325.

: Kishen "On the design of experiments for weighing" Annals of Math. Stat. Vol. 14 (1945) pp. 294−301.

: O. Kempthorne "The Factorial approach to the weighing problem" Annals of Math. Stat. Vol. 19, 1948 pp. 238 − 245.

(27. 2. 7. 受付)