⑨ Compound Normal Population の標本平均の分布

阪大理学部数学教室
小川 潤次郎

母集団の密度函数が

$$f(x)=p\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}+q\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

但し　　$p+q=1,\quad p\cdot q>0$

となるような母集団を仮りに Compound Normal Population と呼んでおく。このような母集団からの Size n の Random Sample $x_1, x_2, \cdots, x_n$ があったとき，その標本平均 $\bar{x}$ の分布を調べるのが目的である。

この母集団の特性函数を $\varphi(t)$ とすれば

$$\varphi(t)=pe^{m_1it-\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2}+qe^{m_2it-\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2}$$

よつて標本平均 $\bar{x}$ の特性函数 $\Phi(t)$ わ

$$\Phi(t)=\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$
$$=\left(p\cdot e^{\frac{m_1}{n}it-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{n^2}t^2}+q\cdot e^{\frac{m_2}{n}it-\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{n^2}t^2}\right)^n$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} e^{\frac{\nu m_1 + (n-\nu) m_2}{n} it - \frac{1}{2} \frac{\nu \sigma_1^2 + (n-\nu)\sigma_2^2}{n} t^2}$$

よつて，$\bar{x}$ の密度函数わ次のような Compound Normal Function になる。

$$f(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \frac{n}{\sqrt{2\pi\{\nu\sigma_1^2 + (n-\nu)\sigma_2^2\}}} e^{-\frac{n^2\left(\bar{x} - \frac{\nu m_1 + (n-\nu) m_2}{n}\right)^2}{2\{\nu\sigma_1^2 + (n-\nu)\sigma_2^2\}}}$$

よつて

$$E(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \frac{\nu m_1 + (n-\nu) m_2}{n}$$

$$D^2(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - E^2(\bar{x})$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \cdot \left\{ \frac{\nu\sigma_1^2 + (n-\nu)\sigma_2^2}{n^2} + \frac{(\nu m_1 + (n-\nu) m_2)^2}{n^2} \right\}$$

$$- \left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} \frac{\nu n_1 + (n-\nu) m_2}{n} \right)^2$$

(1950. 10. 6)