⑱ 或るDISCRIMINATIONについて

（普通の最小二乗法が使えない場合の一例）

樋口　伊佐夫

弾性の歪と応力と関係や，有機化合物の熱分解に於ける，*initial pressure* と *reaction rate* との関係の様に，或る量 x と他の量 Z との函数関係が Z の或る値 Z_0（弾性に於ける *limit of linear elasticity* の如きもの）を境にして異る場合がある

その場合，種々の（*Controlable* な）Z の値に対する x の測定値から，Z_0 の値を推定することが，屡々必要になる。殊に他の実験から，直接又は間接に Z_0 を測定することが出来ない場合，重要性をもつ。

こういう問題を数理統計学的に取扱つたものが，ちよつと見当らなかつたので，考えてみた。未だ十分満足なものではないが，或種の方法を提示しておく。

近い将来にもつとすぐれた方法のみつかることを，期待するものである。

1. 折線の場合の点推定法

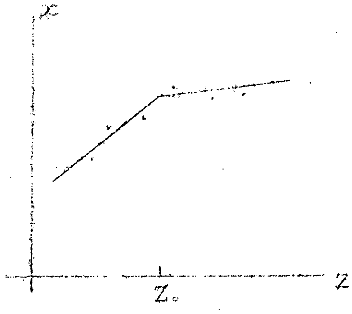
折線の場合は，最も単純で，典型的であるから，先づ述べて置く。

x と Z との真の関係が

$Z \leqq Z_0$ で　　$x = a_1 + b_1 Z$

$Z > Z_0$ で　　$x = a_2 + b_2 Z$

但し　　$Z_0 = -\dfrac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ ----（1.1）



(Fig. 1)

であるとする。 $\underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{1}{b}, \underset{2}{b}$ 及び Z_0 は未知の常数。

今 Z を確定変数と考え，X を $Z \leqq Z_0$ で $N(\underset{1}{a}+\underset{1}{b}Z,\sigma^2)$，$Z \geqq Z_0$ で $N(\underset{2}{a}+\underset{2}{b}Z,\sigma^2)$ に従う variates と考える。

又 Z の異る点に於ける X は互いに独立に分布するものとする。

$\underset{1}{z}_1, \underset{1}{z}_2, \cdots \underset{1}{z}_{n_1}, \underset{2}{z}_1, \underset{2}{z}_2, \cdots \underset{2}{z}_{n_2}$ なる $n(=n_1+n_2)$ 個の点に於ける X の測定値を夫々 $\underset{1}{x}_1, \underset{1}{x}_2, \cdots, \underset{1}{x}_{n_1}, \underset{2}{x}_1, \underset{2}{x}_2, \cdots \underset{2}{x}_{n_2}$ とする。 但し，$\underset{1}{z}_i \leqq \underset{1}{z}_{i+1} \leqq Z_0\ (i=1,\cdots,n_1-1)$

$\underset{2}{z}_i \geqq \underset{2}{z}_{i+1} \geqq Z_0\ (i=1,2,\cdots,n_2)$

n_1（従って n_2）が既知である場合は問題ないが，一般に n_1 が未知であるために，回帰折線を推定するには，如何にすべきかという問題が起る。

この場合の標本分布は

$$(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{(-2\sigma^2)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(\underset{1}{x}_i-\underset{1}{a}-\underset{1}{b}\underset{1}{z}_i)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(\underset{2}{x}_i-\underset{2}{a}-\underset{2}{b}\underset{2}{z}_i)^2\right]\right\}$$

であるから，最尤法の精神によると，尤度

$$L=-\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)+(2\sigma^2)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(\underset{1}{x}_i-\underset{1}{a}-\underset{1}{b}\underset{1}{z}_i)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(\underset{2}{x}_i-\underset{2}{a}-\underset{2}{b}\underset{2}{z}_i)^2\right\}$$

を最大ならしめる様に，すればよい。

n_1 を固定したとき L を最大ならしめる $\underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{1}{b}, \underset{2}{b}$ 及び σ^2 は

$$\left.\begin{aligned}\hat{\underset{v}{a}} &= \bar{\underset{v}{x}} - \hat{\underset{v}{b}}\,\bar{\underset{v}{z}} \\ \hat{\underset{v}{b}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_v}(\underset{v}{x}_i-\bar{\underset{v}{x}})(\underset{v}{z}_i-\bar{\underset{v}{z}})}{\sum_{i=1}^{n_v}(\underset{v}{z}_i-\bar{\underset{v}{z}})^2} \qquad (v=1,2)\end{aligned}\right\} \cdots(1.2)$$

但し $\bar{x}_{\nu} = \frac{1}{n_\nu}\sum_{i=1}^{n_\nu} x_{\nu i}$ $\qquad$ $\bar{z}_{\nu} = \frac{1}{n_\nu}\sum_{i=1}^{n_\nu} z_{\nu i}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_\nu}(x_{\nu i} - \hat{a}_\nu - \hat{b}_\nu z_{\nu i})^2$$

と求まるから，種々の n_1 に対するこれらの組のうち，L を最大ならしめるものは，$-\frac{n}{2}\log(2\pi\hat{\sigma}^2)$ を最大ならしめるもの，即ち $\hat{\sigma}^2$ を最小ならしめるものである。σ^2を計算すると，

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{2}\left\{\sum_{i=1}^{n_\nu}(x_{\nu i} - \bar{x}_\nu)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n_\nu}(x_{\nu i} - \bar{x}_\nu)(z_{\nu i} - \bar{z}_\nu)\right]}{\sum_{i=1}^{n_\nu}(z_{\nu i} - \bar{z}_\nu)^2}\right\}} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

となるから，先づこれを最小にする n_1 を求め，その $\hat{n}_1$ を用いて $\hat{a}_\nu$, $\hat{b}_\nu$ を（1.2）の式から計算し，それを用いて

$$\boxed{\hat{z}_0 = -\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}}$$

と推定すればよい。 この方法による $\hat{z}_0$ の分布は求めにくく，この estimator の性質をしらべることはむつかしいが，次の様な discrimination の考えを用いた，区間推定法によれば，或種の statistical inference が可能である。

2. z_0 の区間推定法（折線の場合）

今，$z_{11} \leqq z_{12} \leqq \cdots \leqq z_{1m_1} \leqq z_{1,m_1+1} \leqq \cdots \leqq z_{1n_1} \leqq z_0$

$z_0 \leqq z_{2n_2} \leqq z_{2,n_2-1} \leqq \cdots \leqq z_{2m_2} \leqq z_{2,m_2-1} \leqq \cdots \leqq z_{22} \leqq z_{21}$

としてこれ等に対応する測定値 $x_{\nu i}$ のうち，$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1m_1}$ は，$a_1 + b_1 z_{1i}$ の測定値であることは確かであり，$x_{2m_2}, x_{2,m_2-1}, \cdots, x_{22}, x_{21}$ は $a_2 + b_2 z_{2i}$ の測定値であることが確かであるとする。$\hat{a}_\nu$, $\hat{b}_\nu$ 及び $\hat{\sigma}^2$ を，(1,2)に於ける n_ν をすべて m_ν で置きかえ，n の代りに $m_1 + m_2$ と置いたものとする。

m_1, m_2 は既知であるから，これ等の量は，見本から計算出来る。

Z_0 の何れの側にあるかがはつきりしているところの測定値だけを用いて inference を行うのである。

今, $\underset{\nu}{T_1} \equiv (\underset{\nu}{\hat{a}} - \underset{\nu}{a})/\sigma$, $\underset{\nu}{T_2} \equiv (\underset{\nu}{\hat{b}} - \underset{\nu}{b})/\sigma \quad (\nu=1,2)$

$$T_3 \equiv (m_1 + m_2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$$

なる量を考えると, $\underset{1}{T_1}$, $\underset{1}{T_2}$, $\underset{2}{T_1}$, $\underset{2}{T_2}$, T_3 の同時積率母函数 $m(\underset{1}{t_1}, \underset{1}{t_2}, \underset{2}{t_1}, \underset{2}{t_2}, t_3)$ は

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{m_1}\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{m_1}{2}}\exp\left\{\frac{\underset{1}{\hat{a}}-\underset{1}{a}}{\sigma}\underset{1}{t_1}+\frac{\underset{1}{\hat{b}}-\underset{1}{b}}{\sigma}\underset{1}{t_2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m_1}(\underset{1}{x_i}-\underset{1}{\hat{a}}-\underset{1}{\hat{b}}\underset{1}{Z_i})^2 t_3-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m_1}(\underset{1}{x_i}-\underset{1}{a}-\underset{1}{b}\underset{1}{Z_i})^2\right\}\prod_{i=1}^{m_1}d\underset{1}{x_i}$$

$$\times\underbrace{\int\cdots\int}_{m_2}\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{m_2}{2}}\exp\left\{\frac{\underset{2}{\hat{a}}-\underset{2}{a}}{\sigma}\underset{2}{t_1}+\frac{\underset{2}{\hat{b}}-\underset{2}{b}}{\sigma}\underset{2}{t_2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m_2}(\underset{2}{x_i}-\underset{2}{\hat{a}}-\underset{2}{\hat{b}}\underset{2}{Z_i})^2 t_3-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m_2}(\underset{2}{x_i}-\underset{2}{a}-\underset{2}{b}\underset{2}{Z_i})^2\right\}\prod_{i=1}^{m_2}d\underset{2}{x_i}$$

と二つの積分の積になり, 各々は普通の linear regression の場合の式であるから

$$\prod_{\nu=1}^{2}\frac{\exp\left\{\left[2\sum_{i=1}^{m_\nu}(\underset{\nu}{Z_i}-\underset{\nu}{\bar{Z}})^2\right]^{-1}\left(\underset{\nu}{t_1}\frac{1}{m_\nu}\sum_{\nu=1}^{m_\nu}\underset{\nu}{Z_i^2}-2\underset{\nu}{\bar{Z}}\,\underset{\nu}{t_1}\,\underset{\nu}{t_2}+\underset{\nu}{t_2^2}\right)\right\}}{(1-2t_3)^{(m_\nu-2)/2}} \quad \cdots(2.1)$$

となることを知る。 分母の積は $(1-2t_3)^{(m_1+m_2-4)/2}$ であるから, これから, $\underset{\nu}{T_1}$, $\underset{\nu}{T_2}$ は平均値0の正規分布, T_3 は $\underset{\nu}{T_1}$ 及 $\underset{\nu}{T_2}$ とは独立に自由度 m_1+m_2-4 の Chi-square 分布に従うことがわかる。 次に

$$v \equiv (\underset{1}{\hat{a}}-\underset{2}{\hat{a}})+(\underset{1}{\hat{b}}-\underset{2}{\hat{b}})Z_0$$

なる変数を考えると, これは正規変数の一次結合であるから, や

はり正規分布に従う。　これも亦，T_3とは独立であることは言うまでもない。　又vの平均は（1.1）より

$$E(v)=E(\hat{a}_1-a_1)+E(a_2-\hat{a}_2)+Z_0E(\hat{b}_1-b_1)+Z_0E(b_2-\hat{b}_2)$$
$$+a_1+b_1Z_0-(a_2+b_2Z_0)=0$$

であるから，

$$\frac{\sqrt{m_1+m_2-4}\ \ v/\sqrt{\operatorname{var} v}}{\sqrt{(m_1+m_2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2}}\equiv t$$

は自由度，m_1+m_2-4 の Student's t 分布に従う。

これからZ_0の信頼区間が求まるわけである。

扨，（2.1）を利用すれば

$$\operatorname{var} v=E\left[\left\{((\hat{a}_1-a_1)+(\hat{b}_1-b_1)Z_0)-((\hat{a}_2-a_2)+(\hat{b}_2-b_2)Z_0)\right\}^2\right]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2}\left\{E\left[(\hat{a}_\nu-a_\nu)^2\right]+2Z_0E\left[(\hat{a}_\nu-a_\nu)(\hat{b}_\nu-b_\nu)\right]+Z_0^2E\left[(\hat{b}_\nu-b_\nu)^2\right]\right\}$$

$$=\sigma^2\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\sum_{i=1}^{m_\nu}(Z_{\nu i}-\overline{Z}_\nu)^2}\left\{\frac{1}{m_\nu}\sum_{i=1}^{m_\nu}Z_{\nu i}^2-2Z_0\overline{Z}_\nu+Z_0^2\right\}$$

こゝで

$$\sum_{\nu=1}^{2}\frac{1}{\sum_{i=1}^{m_\nu}(Z_{\nu i}-\overline{Z}_\nu)^2}\equiv A \qquad -\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\overline{Z}_\nu}{\sum_{i=1}^{m_\nu}(Z_{\nu i}-\overline{Z}_\nu)^2}\equiv B$$

$$\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\frac{1}{m_\nu}\sum_{i=1}^{m_\nu}Z_{\nu i}^2}{\sum_{i=1}^{m_\nu}(Z_{\nu i}-\overline{Z}_\nu)^2}\equiv C$$

とおくと

$\operatorname{var} v=\sigma^2(AZ_0^2+2BZ_0+C)$　となるから

$$t=\left[\frac{(m_1+m_2-4)\{(\hat{a}_1-\hat{a}_2)+(\hat{b}_1-\hat{b}_2)Z_0\}^2}{(m_1+m_2)\hat{\sigma}^2(AZ_0^2+2BZ_0+C)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

となる。自由度 m_1+m_2-4 の t 分布の $100\alpha\%$ point を t_α とする。即ち

$$P_r(|t|>t_\alpha)=\alpha$$

とすれば，$P_r(t^2\leqq t_\alpha^2)=1-\alpha$ 依って

$$P_r\left\{(m_1+m_2-4)\left[(\hat{a}_1-\hat{a}_2)+(\hat{b}_1-\hat{b}_2)Z_0\right]^2-(m_1+m_2)t_\alpha^2\hat{\sigma}^2(AZ_0^2+2BZ_0+C)\leqq 0\right\}$$
$$=1-\alpha$$

今

$$\frac{1}{t_\alpha}\sqrt{1-\frac{4}{m_1+m_2}}=K \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

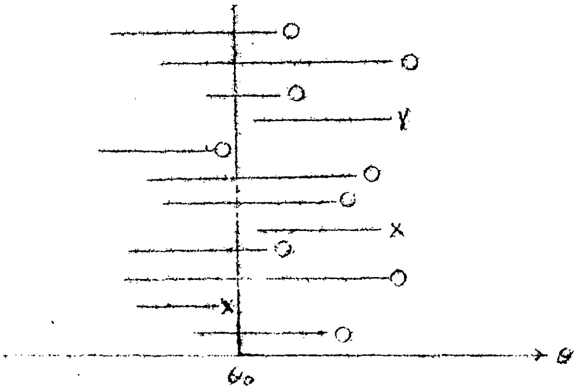
とおけば，$\sqrt{m_1+m_2}\,t_\alpha>0$ だから，上式は

$$P_r\left\{\left[K^2(\hat{b}_1-\hat{b}_2)^2-\hat{\sigma}^2A\right]Z_0^2+2\left[K^2(\hat{a}_1-\hat{a}_2)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)-\hat{\sigma}^2B\right]Z_0\right.$$
$$\left.+\left[K^2(\hat{a}_1-\hat{a}_2)^2-\hat{\sigma}^2C\right]\leqq 0\right\}=1-\alpha \qquad \cdots\cdots \quad (2.3)$$

となり，Z_0 以外は見本から計算出来るから，Z_0 の二次式を負にする範囲を求めれば，それが Z_0 の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間である。

注意書　見本（実現値）によつては，そういう範囲が普通数学で用いる言葉の意味での区間（interval）にならない場合がある。然し，A. Mood は random interval が見本によつてはいくつかの区間の和に分れたり，半直線になつたり，直線全体になつたりする様な場合にも，Confidence interval と言ふ言葉を使つているので，それに倣うことにする。後の説明にも関係するので，こゝで Confidence interval 及び fiducial probability の概念を説明するために A. Mood の入門書に書いてある初等的な図示法を示そう。（初めて学ぶものにとつて非常にわかりやすい説明法だと思われる。）θ の真の値 θ_0 を推定するために，一定の方式に従つて θ の interval（範囲）を見本毎に作つてゆく。そうして無限につゞけてゆけば，θ_0 を

含む様なもの（図の○印）が全体のうちで占める割合は次第に，$(1-\alpha)\times 100\%$ になる。この一つ一つが θ_0 の $(1-\alpha)\times 100\%$ 信頼区間である。

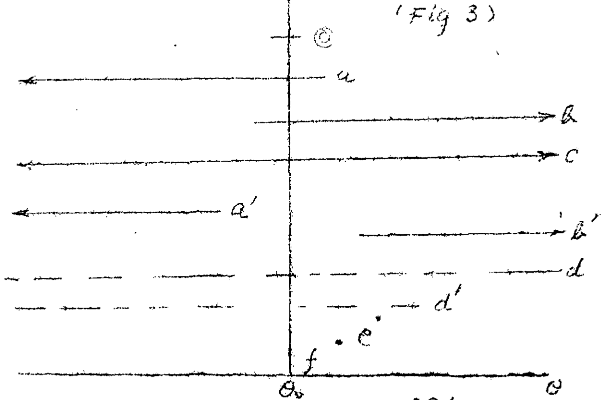


(Fig 2)

故に偶々一つ見本を得て，信頼区間をそれよりつくった時実際は×印のものであるかも知れない。

しかし抽出試行の際そういう見本が得られる確率は α であるから，一つ見本を得てそれから信頼区間をつくり，「真の値 θ_0 はその中にある」と言う時，その Aussage が誤りである確率は α である。（勿論見本抽出を試行と考えての確率）$1-\alpha$ をその *Aussage* の *fiducial probability* と言ふことは周知の通りである。故に区間として得られなくても，次の図の様になる場合も，本質的には何等異るところはないのみか，実際問題としてはるかに適用範囲が増すのである。事実 ⓒ 印の様なものが得られたら θ_0 がその間にあるということを，大威張りで信頼度 $1-\alpha$ を以て主張出るのに，他の見本をとれば，a 印，b 印，……の様なものが得られる可能性があるという理由だけで，その推定を放棄するのは何といっても迂愚な話である。

(Fig 3)



くどい様だけれど尚少しつけたしておこう。c 印の様なものが得られた場合は θ_0 は存在するといえるだけである。e 印の様に一点が得られたならば θ_0 は

その点であると推定するのである。　大低の場合そういうことの起る probability measure は零であるから問題にしていないのであるが，起った場合は，信頼度 $1-\alpha$ を以てそう主張して差支ないわけである。　更に範囲が全然ない場合（空集合），θ_0 は存在しないと推定するのである。　普通 θ_0 は母集団分布の parameter であるので，こんなことは起らないのであるが，我々の場合の様に交点なら，交点がないということも当然数学的 scheme の中に含まれているので，当然こういうことも起るわけである。

兎に角こういう変ったことが起ろうとも fiducial probability を以ていう推論に何ら誤りやあいまいさがあるわけではない。　信頼区間という言葉が悪ければ，信頼集合とでもすればよいであろう。　あまり言葉にとらわれることは事柄の本質を見失って理論の発展を阻害する様に思われる。　信頼区間ということばは適当でないが別によい言葉がないので仮にそれを使わして頂くことにする。

さて，我々のほしい結果は，眞の Z_0 が含まれていると信じ得る，なるべくせまい一つの区間である。　どういう sample が得られたら confidence interval が一つの区間となるかを考えてみることは，強ち無駄なことではなかろう。（2.3）の左辺から，先づ Z_0^2 の係数が正でなければならない。

即ち，　$A>0$ だから

$$\frac{K}{\sqrt{A}} > \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{|\hat{a}_1-\hat{a}_2|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.4)$$

この場合には実は，（2.3）の二次式を零と置いて出来る方程式は，実根をもつ。　判別式を計算してもわかるが，次の様に考えてみよう。

問題の二次式は

$$(1,Z_0)\cdot\left[K^2\begin{pmatrix}(\hat{a}_1-\hat{a}_2)^2 & (\hat{a}_1-\hat{a}_2)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\\ (\hat{a}_1-\hat{a}_2)(\hat{b}_1-\hat{b}_2) & (\hat{b}_1-\hat{b}_2)^2\end{pmatrix}-\hat{\sigma}^2R\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\ Z_0\end{pmatrix}$$

となる。　これを假りに $f(Z_0)$ とする。こゝに R は

$$R \equiv \begin{pmatrix} C & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

（2.4）は $|Z_0|$ が大なるところで $f(Z_0)>0$ なることを意味するから，$f(Z_0) \leqq$ なる様な所があればよい。

所が実は

$$Z_0 = \hat{Z}_0 \equiv -\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}$$

に於て $f(\hat{Z}_0)<0$ となる。なぜなら容易にわかる様に

$$f(\hat{Z}_0) = (-\hat{\sigma}^2)(1, \hat{Z}_0) R \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{Z}_0 \end{pmatrix}$$

となるが，R は実は *positive matrix* である。何なら

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m_\nu}(Z_{\nu i} - \bar{Z}_\nu)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_\nu}\sum_{i=1}^{m_\nu} Z_{\nu i}^2 & \bar{Z}_\nu \\ \bar{Z}_\nu & 1 \end{pmatrix} \equiv R_\nu \qquad (\nu=1,2)$$

とすれば，R_ν は *positive matrices* で $R = R_1 + R_2$ であるからである。　依つて $\hat{\sigma}^2 = 0$ の時別た場合を除いて $f(\hat{Z}_0)<0$ である。*probability measure* 0 を除いて $\hat{Z}_0$ は存在するから，（2.3）の Z_0 の二次式は *positive definite* にはならない。　故に見本が（2.4）をみたすならば *Confidence interval* は一つの區間になり，$\hat{Z}_0$ は常にその区間の中にあることがわかる。

次に t_α を用いる代りに $t_{1-\alpha}$（中心に近い方）を用いて

$$P_r(t^2 \geqq t_{1-\alpha}^2) = 1-\alpha$$

により，$(1-\alpha)\times 100$ % 信頼区間を求めた場合はどうなるであろうか?　この場合は，（2.2）に於ける t_α のかわりに，$t_{1-\alpha}$ としたものを K' とすれば，（2.3）に相当する式は，

$$\Pr\left\{\left[\hat{\sigma}^2 A - K'^2(\hat{b}_1-\hat{b}_2)^2\right]Z_0^2+2\left[\hat{\sigma}^2 B - K'^2(\hat{a}_1-\hat{a}_2)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\right]Z_0 + \left[\hat{\sigma}^2 C - K'^2(\hat{a}_1-\hat{a}_2)^2\right] \leqq 0\right\} = 1-\alpha$$

となり，$\hat{\sigma}^2 A > K'^2(\hat{b}_1-\hat{b}_2)^2$ のときには，左辺の括弧の中の二次式が Positive definite になる。

即ちその時は，眞の値 Z_0 はないと推定しなければならない。そうでない時にも，Z軸全体（Z_0 は存在するということだけが言える）か，又は，二つの半直線が得られる（Z_0 はある数より大なるか又はある数より小なるかいづれかである，ということだけが言える）か，何れかであつて，我々の利用目的には適しない。

故，（2, 4）がみたされる場合は，（2, 3）の左辺から Z_0 に関する二次方程式を解いて，その根 ζ_1, ζ_2（$\zeta_1 < \zeta_2$）を以て信頼限界と出来るわけである。（ζ_1, ζ_2）が（$Z_{1\,m_1+1}$, $Z_{2\,m_2}$）の中に含まれているか（$Z_{1\,m_1}$, $Z_{2\,m_2+1}$）の中に含まれている場合は，更に推論を進める。即ち，$Z_{1\,m_1+e_1} < \zeta_1$, $\zeta_2 < Z_{2\,m_2+e_2}$ となれば，$Z_{1\,1}$, $Z_{1\,2}$, ---, $Z_{1\,m_1}$, ---, $Z_{1\,m_1+e_1}$, $Z_{2\,m_2+e_2}$, $Z_{2\,m_2+e_2-1}$ ------, $Z_{2\,m_2}$, ---, $Z_{2\,1}$ に於ける測定値を用いて，再び同じことをやり，その信頼区間が，$Z_{1\,m_1+e_1}$, $Z_{2\,m_2+e_2}$ の中に入れば，尚狭い幅の推定が出来ることになる。

そしてこの調子で出来るだけくりかえして行けばよい。

但しこの推論の意味を辨えることが必要である。

この方法では推論を進めてゆくことが出来ないのではないかと，小川先生に注意されたが，次の様に考えればよいような気がする。Mood の elementary な説明法で説明する。

我々はこの場合，見本が得られる毎に，次の様な操作を行う。

① 先づ見本のうちの一部の測定値を用いて（即ち（$Z_{1\,m_1}$, $Z_{2\,m_2}$）の中のZに於けるものは用いないで）$100(1-\alpha)$% Confidence interval をつくる。（図に於て実線で示したもの）

② 若しもその Confidence interval が（$Z_{1\,m_1}$, $Z_{2\,m_2}$）の中

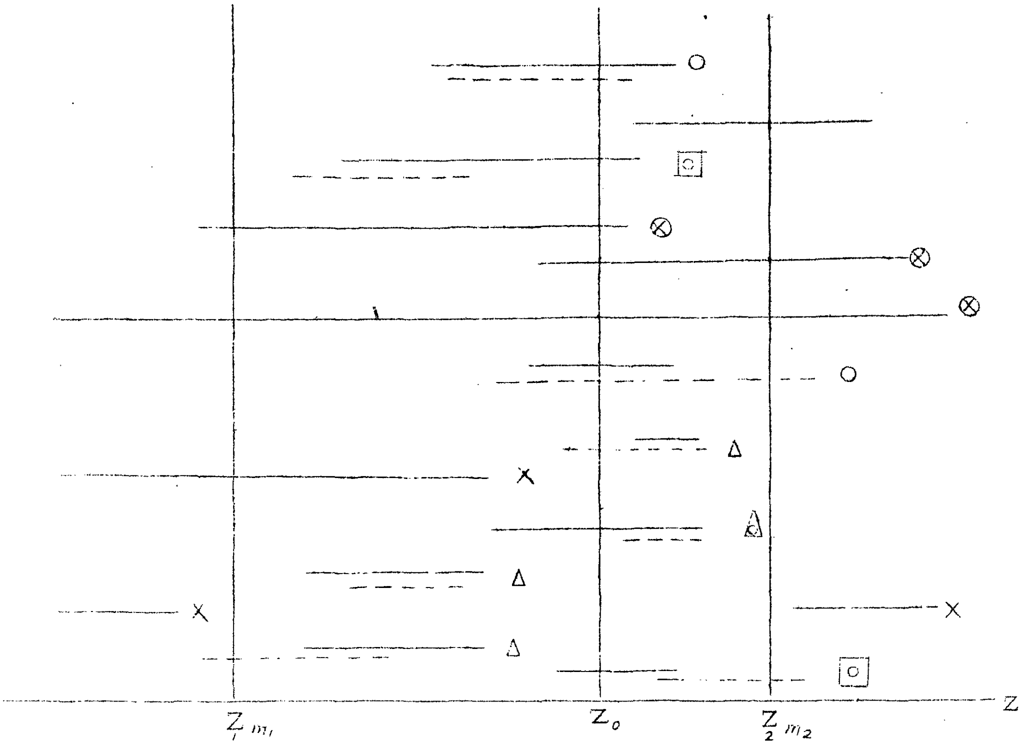


Fig 4

に入らないならば（×印又は⊗印のもの）* その *interval* を採用する。

③ 若しもそうでないならば，もう一度その区間に含まれない出来るだけ多くの Z_1, Z_2 に於ける測定値を用いて $(1-\alpha')\times 100$ % *confidence interval* をつくる。（図に於て破線で示したもの。） そして二つの *interval* のうちよい方を採用する。

即ち後者の方が前者に含まれているなら後者（破線の方）を採用し，そうでないなら前者（実線の方）を採用する。

こうして一つの見本を得たら採用する区間がきまる。 そして「その区間の中に真の値 Z_0 がある」と言う時，その *Aussage* の *fiducial probability* は如何程であろうか？

見本を無限にくりかえし取って，その度毎にこういう操作をしていった時，採用された区間のうち，Z_0 を含むものが全体の中に占める割合を断定すればよい。 先づ印の説明をしておく。

× 印： 第一回目の区間が（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）に含まれず且 Z_0 を含まないもの。

⊗ 印： 最初の区間が（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）に含まれず且 Z_0 を含むもの。

△ 印： 最初の区間は（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）の中に含まれ且つ Z_0 を含まないもの。

○ 印： 最初の区間が（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）に含まれ且つ Z_0 を含み，二回目のものも Z_0 を含むもの。

△ 印： 最初のものが（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）に含まれ且 Z_0 を含み，二回目のものは最初のものの中に含まれるが Z_0 を含まないもの

回 印： 最初のものが（$\underset{1}{Z}_{m_1}$, $\underset{2}{Z}_{m_2}$）に含まれ，且 Z_0 を含み，二回目のものは最初のものの中に含まれず且 Z_0 を含まないもの。

この分類は，排反的で，すべてをつくしている。*Aussage* が誤る場合は，×印のものか△印のものか△印のものかが得られた場合である， ×印のものと△印のものとを合せると，全体の α である。 故に△印と回印とを合せたものの中で，同じ Z_i に対する測定値を用いて破線をつくったものばかり考えると，その中で○印は $1-\alpha'$ を占める。 故に○印と△印と回印の全体を考えてもその中で○印は $1-\alpha'$ を占める。

即ち○印と△印と回印の中で△印のものは α' 以下である。

依つて全体の中で△印は $(1-\alpha)\alpha'$ 以下である。 依つて誤った *Aussage* をする確率は $\alpha+(1-\alpha)\alpha'$ 以下である。 即ち上の方法で一つの区間を得た場合，その中に Z_0 があるということを *fiducial probability* $(1-\alpha)(1-\alpha')$ 以上で言える。

故に，この様にしてだんだん狭くして行くことが出来た場合は，*fiducial probability* は

$$(1-\alpha)(1-\alpha')(1-\alpha'')\cdots\cdots$$

以上であることが出来る。 即ちこの場合 *fiducial probability* についても普通の *Conditional probability* に似たよ

うなことがいえる。

3. 折れた曲線の場合

折線の場合に，考察した方法は，x が Z の多項式の関係にある場合にも形式的にはすぐ拡張出来る。（勿論 Z_0 の片側で，linear な関係にある場合をも含む。） 多項式以外の場合も実際問題としては必要なことも起るのである。

例えば，函数関係が理論的に，parametre を除いて分っている場合，多項式で近似しないで，直接理論的函数関係を用いる方法が望ましい。 しかし多項式以外の場合についてはまだ考えつかないので，多項式の場合えの拡張を述べる。

又実際計算が面倒な割に大した結果も得られそうもないので，実際問題として三次以上の曲線では役に立つかどうかも疑問であるが，一応一般の多項式えの形式的な拡張が出来ることを簡単に示しておくことにする。

$Z \leqq Z_0$ で　$x = \underset{1}{a}_0 + \underset{1}{a}_1 Z + \underset{1}{a}_2 Z^2 + \cdots + \underset{1}{a}_{k_1} Z^{k_1}$

$Z \geqq Z_0$ で　$x = \underset{2}{a}_0 + \underset{2}{a}_1 Z + \underset{2}{a}_2 Z^2 + \cdots + \underset{2}{a}_{k_2} Z^{k_2}$

但し，Z_0 は $\sum_{\lambda=0}^{k_1} \underset{1}{a}_\lambda Z_0^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{k_2} \underset{2}{a}_\lambda Z_0^\lambda$ ……… (3.1)

を満たす或る実数とする。 真の関係がこの様なものであるとする $k = \max(k_1, k_2)$ として

$k_1 > k_2$ ならば　$\underset{2}{a}_{k_2+1} \equiv \underset{2}{a}_{k_2+2} \equiv \cdots \equiv \underset{2}{a}_{k_2} (\equiv \underset{2}{a}_k) \equiv 0$

$k_2 > k_1$ ならば　$\underset{1}{a}_{k_1+1} \equiv \underset{1}{a}_{k_1+2} \equiv \cdots \equiv \underset{1}{a}_{k_2} (\equiv \underset{1}{a}_k) \equiv 0$

を用いて記法を簡単にする。 次に

$\underset{\nu}{\mathfrak{a}}$ は $(\underset{\nu}{a}_0, \underset{\nu}{a}_1, \cdots, \underset{\nu}{a}_k)$ なる横 $k+1$ vectors.

$\underset{\nu}{\mathfrak{z}}_i$ 等は $(1, \underset{\nu}{z}_i, \underset{\nu}{z}_i^2, \underset{\nu}{z}_i^3, \cdots, \underset{\nu}{z}_i^k)$ なる横 $k+1$ vectors

$\mathfrak{z}_0$ は　$(1, Z_0, Z_0^2, Z_0^3, \cdots\cdots, Z_0^k)$ なる横 $k+1$ vector

$\mathfrak{a}_\nu^*$, $\mathfrak{z}_{\nu i}^*$, $\mathfrak{z}_0^*$ 等は夫等の transposed とする。$\mathfrak{a}_\nu \cdot \mathfrak{z}_{\nu i}^*$ 等は内積 $\sum_{\lambda=0}^{k} a_{\nu\lambda} Z_{\nu i}^{\lambda}$ 等をあらわすものとする。

そうすれば（3.1）の如きは

$$\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{z}_0^* = \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{z}_0^*$$

と書ける。

Z_0 の両側で σ^2 が異る場合を考えて，X は $Z \leqq Z_0$ で，$N(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{z}^*, \; w_1 \sigma^2)$ に従い，$Z \geqq Z_0$ では $N(\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{z}^*, w_2 \sigma^2)$ に従い，Z の異る点では互いに独立に分布する variate とする。こゝで w_1, w_2 は known weight で $w_\nu > 0$。

先ず 1 で考えた様な点推定を行う。今，

$$R_\nu^{-1} \equiv \begin{pmatrix} n_\nu & \sum Z_{\nu i} & \sum Z_{\nu i}^2 & \sum Z_{\nu i}^3 & \cdots\cdots & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu} \\ \sum Z_{\nu i} & \sum Z_{\nu i}^2 & \sum Z_{\nu i}^3 & \sum Z_{\nu i}^4 & \cdots\cdots & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu+1} \\ \sum Z_{\nu i}^2 & \sum Z_{\nu i}^3 & \sum Z_{\nu i}^4 & \sum Z_{\nu i}^5 & \cdots\cdots & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum Z_{\nu i}^{k_\nu} & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu+1} & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu+2} & \sum Z_{\nu i}^{k_\nu+3} & \cdots & \sum Z_{\nu i}^{2k_\nu} \end{pmatrix} \quad (\nu=1,2)$$

（但し各 Σ は $\sum_{i=1}^{n_\nu}$ の意義である）

とする。よく知られているように R_ν^{-1} は positive definite な symmetric matrix であるから，R_ν は存在し，

$$\underset{\nu}{y} \equiv (\underset{\nu}{y_0}, \underset{\nu}{y_1}, \ldots, \underset{\nu}{y_k}) \qquad y_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n_\nu} x_i z_i^{\lambda}$$

$$\hat{a}_\nu \equiv (\hat{a}_{\nu 0}, \hat{a}_{\nu 1}, \ldots, \hat{a}_{\nu k}) \equiv y_\nu \tilde{R}_\nu$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{w_\nu} \sum_{i=1}^{n_\nu} (x_{\nu i} - \hat{a}_\nu \cdot z_{\nu i}^{*})^2}{\frac{n_1}{w_1} + \frac{n_2}{w_2}}$$

（但し $\tilde{R}$ は R_ν の右下外側に 0-element を適当に付け加えて $(k+1, k+1)$ matrices に拡大したもの）として，

$$\sum_{\nu=1}^{2} n_\nu \log(w_\nu \hat{\sigma}^2)$$

を最小にする様な $\hat{a}_\nu$ を決定することになる。

$w_1 = w_2$ の時には 1 の場合の様に $\sum_{\nu=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_\nu} (x_{\nu i} - \hat{a}_\nu \cdot z_{\nu i}^{*})^2$ を最小にする様に，$\hat{a}_\nu$ を決定することになる。然しこの場合も，$\hat{z}_0$ の推定子がどんな性質をもつか分らない。ただ最尤法の精神から言えば，標本が与えられた時，そういう標本が最も得られやすいところの，k_1 次と，k_2 次の曲線から成る図形を求めていることになる。

次に 2 の時の区間推定法を，この場合に，形式的に拡張することも容易である。

本章の始めからの n_ν をすべて m_ν でおきかえ，これ迄の notations をそのまゝ用いることにする。（即ち例えば $\sum^{n_\nu}$ 等はすべて $\sum^{m_\nu}$ 等の意味とする。）

$$\left.\begin{aligned} T &\equiv \hat{\sigma}^2 \left(\frac{m_1}{w_1} + \frac{m_2}{w_2} \right) \Big/ \sigma^2 \\ T_\nu &\equiv (\hat{a}_\nu - a_\nu) \big/ (\sqrt{w_\nu}\,\sigma) \qquad (\nu = 1, 2) \end{aligned}\right\}$$

とし，T_ν の components と T との $2(k+1)+1$ 個の量の同時確率密度函数を考えると，$\nu = 1$ の部分と $\nu = 2$ の部分との

積になり，T の方は，一旦分れたものを再び合成すれば，$\underset{\nu}{T}$ は平均 0, variance + covariance matrix が，$\hat{\underset{\nu}{R}}$ なる正規分布に従い，ν の異る値に対するものは互いに独立である。

又これ等とは独立に T は，自由度 $(m_1+m_2)-(k_1+k_2+2)$ の，chi-square 分布に従うことがわかる。依つて

$$v \equiv (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)\cdot z_0^*$$

をつくれば，(3.1) を注意すれば，これは平均 0 の正規分布に従い，且つ T とは独立に分布するから

$$\frac{\sqrt{m_1+m_2-k_1-k_2-2}\,(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)\cdot z_0^*/\sqrt{\mathrm{var}\,v}}{\sqrt{\left(\dfrac{m_1}{w_1}+\dfrac{m_2}{w_2}\right)\hat{\sigma}^2/\sigma^2}} \equiv t$$

が自由度，$m_1+m_2-k_1-k_2-2$ の t 分布をなすことより，z_0 の信頼区間をつくることが出来る。扨

$$\mathrm{var}\ v = E\{[(\hat{\alpha}_1-\alpha_1)\cdot z_0^* + (\alpha_2-\hat{\alpha}_2)\cdot z_0^*]^2\}$$

$$= E\{[(\hat{\alpha}_1-\alpha_1)\cdot z_0^*]^2\} + E\{[(\alpha_2-\hat{\alpha}_2)\cdot z_0^*]^2\}$$

$$= E(z_0\cdot \underset{1}{A} z_0^*) + E(z_0\cdot \underset{2}{A} z_0^*)$$

ここに $\underset{\nu}{A}$ は $(\underset{\nu}{\hat{a}}_\lambda - a_\lambda)(\underset{\nu}{\hat{a}}_\mu - a_\mu)$ を $(\lambda+1, \mu+1)$ element とする $(k+1, k+1)$ − matrix をあらわす。

$$E(\underset{\nu}{A}) = \underset{\nu}{w}\,\sigma^2 \underset{\nu}{\tilde{R}} \quad \text{であるから}$$

$$R \equiv \underset{1}{w}\underset{1}{\tilde{R}} + \underset{2}{w}\underset{2}{\tilde{R}}$$

とすれば，$\mathrm{var}\ v = z_0 R\cdot z_0^*$ となる。

$\underset{\nu}{A}$ が symmetric だから R も symmetric で，$\underset{\nu}{R}$ が positive matrix であることがわかる。（このことは必

ずしも，$\widetilde{R}_1$，$\widetilde{R}_2$ の両方がともに *positive matrices* であるというわけではない。）

$$t^2 = \frac{(m_1+m_2-k_1-k_2-2)\{(\hat{\mathfrak{a}}_1-\hat{\mathfrak{a}}_2)\cdot \mathfrak{z}_0^*\}^2}{\left(\frac{m_1}{w_1}+\frac{m_2}{w_2}\right)\hat{\sigma}^2 \mathfrak{z}_0\cdot R\mathfrak{z}_0^*}$$

であるから，自由度（$m_1+m_2-k_1-k_2-2$）の t 分布の $100\alpha\%$ 点を用いて　$Pr(t_\alpha^2 \geq t^2) = 1-\alpha$　から信頼区間が求まるわけであるが，今（$\hat{\mathfrak{a}}_{1\lambda}-\hat{\mathfrak{a}}_{2\lambda}$）（$\hat{\mathfrak{a}}_{1\mu}-\hat{\mathfrak{a}}_{2\mu}$）を（$\lambda+1$, $\mu+1$）element とする（$k+1$, $k+1$）- matrix を G とし，

$$K = \frac{1}{t_\alpha}\sqrt{(m_1+m_2-k_1-k_2-2)\Big/\left(\frac{m_1}{w_1}+\frac{m_2}{w_2}\right)}$$

とすれば，　$t_\alpha^2 \geq t^2$　は

$$\boxed{\mathfrak{z}_0\cdot(K^2G-\hat{\sigma}^2R)\mathfrak{z}_0^* \leqq 0} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.2)$$

これは　$K^2G-\hat{\sigma}^2R$　なる matrix の（$k+1$, $k+1$）- element が 0 でない限り Z_0 の $2k$ 次の不等式である。

Z 軸上で（3.2）がみたされている範囲が，Z_0 の信頼区間になるわけであるが，回帰推定曲線の交点即ち　$\hat{\mathfrak{a}}_1\cdot\mathfrak{z}_0^* = \hat{\mathfrak{a}}_2\cdot\mathfrak{z}_0^*$　を満足する $\hat{Z}_0$ は常に信頼区間の中に含まれていることは直ちにわかる。

即ち $\hat{\mathfrak{z}}_0$ を　　$(\hat{\mathfrak{a}}_1-\hat{\mathfrak{a}}_2)\hat{\mathfrak{z}}_0^* = 0$

をみたすものとすれば

$$\hat{\mathfrak{z}}_0 G = 0 \quad (0 \text{ は } k+1 \text{ 横 } 0 \text{ vector})$$

$$G\hat{\mathfrak{z}}_0 = 0 \quad (0 \text{ は } k+1 \text{ 縦 } 0 \text{ vector})$$

となるから

$$\hat{\mathfrak{z}}_0(K^2G-\hat{\sigma}^2R)\hat{\mathfrak{z}}_0^* = -\hat{\sigma}^2\hat{\mathfrak{z}}_0 R\hat{\mathfrak{z}}_0^*$$

で，R は *positive matrix* だからこれは負である。

故って $\hat{z}_0$ は（3.2）をみたしていることがわかった。

どんな見本が得られても必ず $\hat{z}_0$ があるなら常にZ軸上に(3.2)をみたす範囲はあるわけであるが，一般にそのことは言えそうもない。

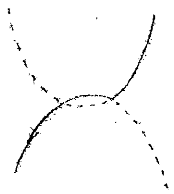


Fig 5.

例えば図の様な場合は，Z_0 は存在しない。（曲線は交らない）と推定しなければならない様な *sample* が得られる確率は有限になるであろう。故に前に注意した様に信頼区間の定義を拡張して置く必要がある。

最後に問題の本旨からは少し離れるが，見本と，得られる信頼区間の形との間の関係を探ろうと試みた。

思わしい結果は得られなかったが，次の様な事柄だけがわかったので附加えておく。

即ち，$K^2G-\hat{\sigma}^2R$ なる matrix は positive matrix になることはない。という事柄である。

しかしこの事は勿論（3.2）を満足する様な実数 Z_0 が常に存在するということを意味しない。上の事実は次の様にしてわかる。（或いはもっと簡単に證明出来るかも知れない。）

今，G の (λ,μ)-element を $g_{\lambda-1,\mu-1}$　R の (λ,μ)-element を $r_{\lambda-1,\mu-1}$ とあらわす。

$det(K^2G-\hat{\sigma}^2R)$ を，μ 列が，K^2G の μ 列か，或いは $-\hat{\sigma}^2R$ の μ 列かの何れかから成る $(k+1,k+1)$-determinant の和に分解する。即ち，

$$
det\begin{vmatrix}
K^2g_{00} & K^2g_{01} & -\hat{\sigma}^2r_{02} & -\hat{\sigma}^2r_{03} & \cdots & K^2g_{0k}\\
K^2g_{10} & K^2g_{11} & -\hat{\sigma}^2r_{12} & -\hat{\sigma}^2r_{13} & \cdots & K^2g_{1k}\\
K^2g_{20} & K^2g_{21} & -\hat{\sigma}^2r_{22} & -\hat{\sigma}^2r_{23} & \cdots & K^2g_{2k}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
K^2g_{k0} & K^2g_{k1} & -\hat{\sigma}^2r_{k2} & -\hat{\sigma}^2r_{k3} & \cdots & K^2g_{kk}
\end{vmatrix}
$$

の様な 2^{k+1} 個の行列式の和に分解する。

これらのうち，K^2G からの行が二つ以上のものはすべて0になる。何故なら，g_{ij} は $(\underset{1}{\hat{a}}_i-\underset{2}{\hat{a}}_i)(\underset{1}{\hat{a}}_j-\underset{2}{\hat{a}}_j)$ 即ち i を suffix とする数と j を suffix とする数との積であるからである。

依つて残るのは何れか一行が K^2G から取られたもの $(k+1)$ 個と，$\det(-\hat{\sigma}^2R)$ とである。

これを，g_{ij} について展開すると，

$$\det(K^2G-\hat{\sigma}^2R)=K^2(-\hat{\sigma}^2)^k\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}(\text{R に於ける } r_{ij} \text{ の Adjunkte})\,g_{ij}$$

$$+\ \det(-\hat{\sigma}^2R)$$

$$=(-\hat{\sigma}^2)^k\left\{K^2\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}(R^{-1}\text{の}(i,j)\,element)\det R\, g_{ij}-\hat{\sigma}^2\det R\right\}$$

R^{-1} は symmetric であるから

$$=(-\hat{\sigma}^2)^k\left\{K(\underset{1}{\hat{\alpha}}-\underset{2}{\hat{\alpha}})R^{-1}K(\underset{1}{\hat{\alpha}}-\underset{2}{\hat{\alpha}})^*-\hat{\sigma}^2\right\}\det R$$

R^{-1} の $(k+1,\ k+1)$- element 即ち (R の $r_{k,k}$ の cofactor)/det R を $\left\{(\text{R の } r_{kk} \text{ の cofactor})/\det R\right\}-\left\{\hat{\sigma}^2/K^2(\underset{1}{\hat{a}}_k-\underset{2}{\hat{a}}_k)^2\right\}$ で置きかえ，残りは R^{-1} の element をそのまゝにした行列を S とすると上式は

$$\det(K^2G-\hat{\sigma}^2R)=(-\hat{\sigma}^2)^k\det R\cdot K(\underset{1}{\hat{\alpha}}-\underset{2}{\hat{\alpha}})S\left[K(\underset{1}{\hat{\alpha}}-\underset{2}{\hat{\alpha}})\right]^*$$

となる。ところで S も symmetric であることは明かで，且

$$\det S=\det R^{-1}-\frac{\hat{\sigma}^2}{K^2(\underset{1}{\hat{a}}_k-\underset{2}{\hat{a}}_k)}\times(\det R^{-1}\text{の}(k+1,k+1)\text{-}cofactor)$$

$$= \frac{1}{\det R}\left(1 - \frac{\hat{\sigma}^2 r_{k,k}}{K^2(\hat{a}_{1k} - \hat{a}_{2k})^2}\right)$$

$\det R > 0$ であるから，もしも $K^2(\hat{a}_{1k}-\hat{a}_{2k})^2 > \hat{\sigma}^2 r_{k,k}$ 即ち $K^2 g_{k,k} - \hat{\sigma}^2 r_{k,k} > 0$ ならば $\det S > 0$，又 R^{-1} は positive matrix であるから $\det S$ の k 以下の Hauptminor は皆正である。従って S は positive matrix，依って $K^2 g_{kk} - \hat{\sigma}^2 r_{kk} > 0$ ならば常に（$\hat{\sigma}^2 = 0$ の場合をのぞき）$\operatorname{sign}\det(K^2G - \hat{\sigma}^2 R) = (-1)^k$ となる。

このことは k が奇数のときは $K^2G - \hat{\sigma}^2R$ の Hauptminor が同時にすべて正になるということは無いということを意味する。従って $K^2G - \hat{\sigma}^2R$ は positive matrix にはなり得ないことがわかった。k が偶数の時は $K^2G - \hat{\sigma}^2R$ の $k+1$ 行 $k+1$ 列を除いた (k,k)-matrix を考えれば全く同様にしてそれが positive matrix にならないことがわかる。

従って $K^2G - \hat{\sigma}^2R$ が positive matrix になることはないことがわかる。特に $k=1$ のときは

$$(1,\ Z_0)(K^2G - \hat{\sigma}^2R)(1, Z_0)^* \leqq 0$$

になる様な実数 Z_0 が存在することを意味し，2に於て言ったことの別証になっている。

以　上

後　記

原稿を書き終つてから，遠藤氏に，*Fisher* の本に二つの *regression lines* の交点を推定する方法が出ていることを教えていただいた。　問題のとらえ方が少し異つているだけで，こゝに書いたものは本質的には全く同じである。　しかし或意味に於て，*Fisher* の本のその部分を読む際の助けにもなると思われるので，全然書き変えないことにする。　尚この問題は旧友，早稲田大学燃料化学科宮崎智雄君の実験から考えさせられたものであることを披露し，同君の御健闘を祈るとともに，熱心な御鞭達を賜つた。　阪大小川潤次郎，統計数理遠藤健児両先生に感謝を捧げるものである。

参　考　書

Alexander Mc Farlane Mood :

Introduction to the Theory of Statistics 1950 ;

Mc Graw Hill Book Company Inc.

Discrimination については 299 頁
Regression については 291 頁より
Confidence intervals については 220 頁より

R. A. Fisher :

Statistical Methods for Reserch Workers 1948

142 頁より

行列に関しては例えば

高木貞治：　代数学講義：共立社