㉒ Sheppardの補正について

阪大理学部数学教室　小川潤次郎・中上節夫
塩谷　実

groupingによつて計算されたモーメントとUngroupedで計算されたモーメントの間の関係が所謂"Sheppardの補正"と呼ばれるものである。

これについては，Sheppard(1)及びH.Wald(2)等によつて結果が得られているのであるが(3)それ等を簡単に導出する方法が統数研の塩谷実君及び阪大数学科学生中上節夫君によつて得られたので両君の許しを得てこゝに紹介する。(*)

(1.) 一次元分布の場合　　その積率母函数を $F(t)$ とする。

$$F(t)\equiv E(e^{tx})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\alpha_\nu$$

$\bar{\alpha}_\nu$ でgroupedモーメントを示す。そうすれば

$$\bar{F}(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\bar{\alpha}_\nu=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{t\xi_i}\int_{\xi_i-\frac{1}{2}h}^{\xi_i+\frac{h}{2}}f(x)\,dx=\sum_{i=-\infty}^{\infty}g(\xi_i)$$

但しこゝで

$$g(\xi)=e^{t\xi}\int_{\xi-\frac{1}{2}h}^{\xi+\frac{1}{2}h}f(x)\,dx \qquad \xi_i=\xi_0+ih$$

h はgrouping intervalの巾で $f(x)$ はdensityである。

Euler-Maclaurinの総和公式によつて

$$\sum_{-\infty}^{\infty}g(\xi_i)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi_0+hy)\,dy-h\int_{-\infty}^{\infty}p_1(y)g'(\xi_0+hy)\,dy^{(4)}$$

こゝで右辺の第二項が無視し得るならば

$$\bar{F}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(\xi_0+hy)}\,dy\int_{\xi_0+hy-\frac{1}{2}h}^{\xi_0+hy+\frac{1}{2}h}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{\frac{x-\xi_0}{h}-\frac{1}{2}}^{\frac{x-\xi_0}{h}+\frac{1}{2}} e^{t(\xi_0+hy)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{t(x+\frac{h}{2})}-e^{t(x-\frac{h}{2})}}{ht}f(x)\,dx$$

$$=\frac{e^{\frac{ht}{2}}-e^{-\frac{ht}{2}}}{ht}\; F(t)$$

ここで

$$\frac{ht}{e^{\frac{ht}{2}}-e^{-\frac{ht}{2}}} = e^{\frac{ht}{2}}\frac{ht}{e^{ht}-1} = 2\frac{\frac{ht}{2}}{e^{\frac{ht}{2}}-1} - \frac{ht}{e^{ht}-1}$$

$$=2\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{B_\mu}{\mu!}\left(\frac{ht}{2}\right)^{\mu}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}(ht)^{\nu}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}h^i(2^{1-i}-1)t^i$$

B_μ, B_ν, B_i は Bernoulli 数

なることを用いて

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\alpha^{\nu}=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}h^i(2^{1-i}-1)t^i\right\}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{t^\mu}{\mu!}\bar{\alpha}_\mu$$

で t の同　の係数を比較して

$$\alpha_\nu=\sum_{i=0}^{\nu}\binom{\nu}{i}(2^{1-i}-1)B_i\bar{\alpha}_{\nu-i}h^i$$

2. 二次元分布の場合　同様に grouping したものを－をつけて表はす.

$$\overline{F(t,s)}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{t\xi_i+s\eta_j}\int_{\xi_i-\frac{1}{2}h}^{\xi_i+\frac{1}{2}h}\int_{\eta_j-\frac{1}{2}k}^{\eta_j+\frac{1}{2}k}f(x,y)\,dx\,dy$$

但しここで $f(x,y)$ は頻度函数で h, k は夫々 grouping interval の巾であり、又

$$\xi_i=\xi_0+ih,\quad \eta_j=\eta_0+jk$$

今

$$g(\xi,\eta)\,e^{t\xi+s\eta}\int_{\xi-\frac{1}{2}h}^{\xi+\frac{1}{2}h}\int_{\eta-\frac{1}{2}k}^{\eta+\frac{1}{2}k}f(x,y)\,dx\,dy$$

とおくと

$$\bar{F}(t,s)\;\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}g(\xi_i,\eta_j)$$

Euler-Maclaurin の総和公式を二重に用いる

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} g(\xi_i, \eta_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} g(\xi_i, \eta_j)\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_0 + hu, \eta_j) du - h\int_{-\infty}^{\infty} P_1(u) g_u(\xi_0 + hu, \eta_j) du\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(\xi_0 + hu, \eta_j) - h S_1(u) \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_u(\xi_0 + hu, \eta_j)\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) dv - k\int_{-\infty}^{\infty} P_1(v) g_v(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) dv\right) du$$

$$- h\int_{-\infty}^{\infty} P_1(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g_u(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) dv - k\int_{-\infty}^{\infty} P_1(v) g_{uv}(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) dv\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) du dv + R$$

但し

$$R = -k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(v) g_v(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) du dv - h\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(u) g_u(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) du dv + hk\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(u) P_1(v) g_{uv}(\xi_0 + hu, \eta_0 + kv) du dv$$

若しRを無視出来るならば

$$\overline{F(r, s)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{r(\xi_0 + hu) + s(\eta_0 + kv)} du dv \cdot \int_{\xi_0 + hu - \frac{1}{2}h}^{\xi_0 + hu + \frac{1}{2}h}\int_{\eta_0 + kv - \frac{1}{2}k}^{\eta_0 + kv + \frac{1}{2}k} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \int_{\frac{x-\xi_0}{h} - \frac{1}{2}}^{\frac{x-\xi_0}{h} + \frac{1}{2}} e^{r(\xi_0 + hu)} du \int_{\frac{y-\eta_0}{k} - \frac{1}{2}}^{\frac{y-\eta_0}{k} + \frac{1}{2}} e^{s(\eta_0 + ku)} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t(x+\frac{h}{2})}-e^{t(x-\frac{h}{2})}}{ht}\cdot\frac{e^{s(y+\frac{k}{2})}-e^{s(y-\frac{k}{2})}}{ks}\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{e^{\frac{ht}{2}}-e^{-\frac{ht}{2}}}{ht}\cdot\frac{e^{\frac{ks}{2}}-e^{-\frac{ks}{2}}}{ks}\, F(t,s)$$

よって

$$\overline{F(t,s)} \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m s^n}{m!\,n!}\bar{\alpha}_{m,n}$$

として

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\mu s^\nu}{\mu!\,\nu!}\alpha_{\mu\nu} = \left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}(ht)^i(2^{1-i}-1)\right\}$$

$$\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}(ks)^j(2^{1-j}-1)\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!\,n!}\bar{\alpha}_{m,n}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_i B_j}{i!\,j!} h^{i+j} t^i s^j (2^{1-i}-1)(2^{1-j}-1)\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!\,n!}\bar{\alpha}_{m,n}\right\}$$

$t^\mu s^\nu$ の係数を比較して

$$\alpha_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}(2^{1-i}-1)(2^{1-j}-1)(2^{1-j}-1)B_i B_j\,\bar{\alpha}_{\mu-i,\nu-j}\,h^i k^j$$

これを書きなおすと

$$\alpha_{1,1} = \bar{\alpha}_{1,1}$$
$$\alpha_{2,1} = \bar{\alpha}_{2,1} - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{0,1}h^2$$
$$\alpha_{1,2} = \bar{\alpha}_{1,2} - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{1,0}k^2$$
$$\alpha_{3,1} = \bar{\alpha}_{3,1} - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_{1,1}h^2$$
$$\alpha_{1,3} = \bar{\alpha}_{1,3} - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_{1,1}k^2$$
$$\alpha_{2,2} = \bar{\alpha}_{2,2} - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{2,0}h^2 - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{0,2}k^2 + \frac{1}{144}h^2k^2$$
$$\alpha_{4,1} = \bar{\alpha}_{4,1} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}_{2,1}h^2 + \frac{7}{240}\bar{\alpha}_{0,1}h^4$$
$$\alpha_{1,4} = \bar{\alpha}_{1,4} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}_{1,2}k^2 + \frac{7}{240}\bar{\alpha}_{1,0}k^4$$
$$\alpha_{3,2} = \bar{\alpha}_{3,2} - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{3,0}k^2 - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_{1,2}h^2 + \frac{1}{48}\bar{\alpha}_{1,0}h^2k^2$$
$$\alpha_{2,3} = \bar{\alpha}_{2,3} - \frac{1}{12}\bar{\alpha}_{0,3}h^2 - \frac{1}{4}\bar{\alpha}_{2,1}k^2 + \frac{1}{48}\bar{\alpha}_{0,1}h^2k^2$$

- - - - - - - - - - - - -

を得る．Central moment については

$$\mu_{11} = \bar{\mu}_{11},\quad \mu_{21} = \bar{\mu}_{21},\quad \mu_{12} = \bar{\mu}_{12}$$

$$\mu_{31} = \bar{\mu}_{31} - \frac{1}{4}\bar{\mu}_{11}\cdot h^2 \quad , \quad \mu_{13} = \bar{\mu}_{13} - \frac{1}{4}\bar{\mu}_{11}\cdot k^2$$
$$\mu_{22} = \bar{\mu}_{22} - \frac{1}{12}\bar{\mu}_{20}\cdot k^2 - \frac{1}{12}\bar{\mu}_{02}\cdot h^2 + \frac{1}{144}h^2 k^2$$
$$\mu_{41} = \bar{\mu}_{41} - \frac{1}{2}\bar{\mu}_{21}\cdot h^2 , \quad \mu_{14} = \bar{\mu}_{14} - \frac{1}{2}\bar{\mu}_{12}\cdot k^2$$
$$\mu_{32} = \bar{\mu}_{32} - \frac{1}{12}\mu_{3,0}\, k^2 - \frac{1}{4}\bar{\mu}_{1,2}\, k^2$$
$$\mu_{23} = \bar{\mu}_{23} - \frac{1}{12}\bar{\mu}_{03}\, h^2 - \frac{1}{4}\bar{\mu}_{2,1}\, k^2$$
$$\text{-----------------}$$

を得る.

(1) W.F. Sheppard, On the calculatum of the most probabl values of frequency-con-stants for data arrangedaurding to equidistant dursuns of a scale Proc. London Math Soc, 29 (1898) p. 353

(2) H. Wold. Sulla Corrzune di Sheppard Giorn Ist Italians d. Attuari, 5 (1934). p. 304

H. Wold Sheppard's correction formulae in several vanables. SA. 1934 p. 248

(3) H. Cramér. Mathematical Methods of Statistics, 1946 Princeton. Chapt 27. §9 pp 360-363 を見よ

(4) H. Cramér, loc.cit. Part I, Chapt. 12. §2 p 124 参照

(*) 以下では formal な計算技巧式を問題にしているのであつて, そこで用いられる数学的操作はすべて許されるものと假定している.