㉝ 或不等式の群に就いて（二）

（Sample Mean の爲の Confidence Interval）

水 野 坦

記号は前報告と同様である。

L. Guttman は A Distribution-Free Confidence Interval for the Mean ; The Annals of Mathematical Statistics. Sept. '48

で Random Variable を含む不等式を與へた。
之は σ 以外の universe parameter を含まないといふ観点で導出されたものであるが order を考慮して関係する parameter が σ だけである様にとする時次の様な事が考へられる。

$$S^2 = \frac{\Sigma(x_{(i)} - \bar{x})^2}{n}$$

$$F \equiv (\bar{x} - \check{x})^2 - \alpha S^2 \quad \text{として}$$

次の函数を考へる

$$F^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^k (1+\alpha)^{m-k} \left(\frac{\Sigma x_i^2}{n}\right)^k \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^{2(m-k)} \cdot$$

$$= \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\alpha^h (1+\alpha)^{m-h}}{n^{2m-h}} (\Sigma x_i^2)^h (\Sigma x_i)^{2(m-h)}$$

然らば

$$E(F^m) = \int_\Omega F^m dP \geq \int_\omega F^m dP \qquad \omega : F \geq \lambda \sqrt[m]{E(F^m)}$$

$$\geq \int_\omega \lambda^m E(F^m) dP$$

$$= \lambda^m E(F^m) \int_\omega dP$$

$$\therefore \quad P_r \left\{ F \geq \lambda \sqrt[m]{E(F^m)} \right\} \leq \frac{1}{\lambda^m}$$

$$\therefore \quad P_r \left\{ F \leq \lambda \sqrt[m]{E(F^m)} \right\} \geq 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

が成立するから $E(F^m)$ を計算する.

$$E(F^m) = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\alpha^h (1+\alpha)^{m-h}}{n^{2m-h}} E\left[(\Sigma x_i^2)^h (\Sigma x_i)^{2(m-h)} \right]$$

然るに

$$E\left[(\Sigma x_i^2)^h (\Sigma x_i)^{2(m-h)} \right]$$

$$= \sum_{\substack{\Sigma \alpha_i = h \\ \Sigma \beta_i = 2(m-h)}} \frac{h!}{\prod \alpha_i !} \frac{\{2(m-h)\}!}{\prod \beta_i !} \sum_{(1\cdots\cdots n)} E(x_1^{2\alpha_1+\beta_1} \cdots\cdots x_n^{2\alpha_n+\beta_n})$$

$$= \sum_{\substack{\Sigma \gamma_i = 2m \\ \Sigma \alpha_i = h}} \frac{h!}{\prod \alpha_i !} \frac{\{2(m-h)\}!}{\prod (\gamma_i - 2\alpha_i)!} \frac{n!}{\prod \lambda_i !} E(x_1^{\gamma_1} \cdots\cdots x_n^{\gamma_n})$$

此所で次の関係が成立する.

$$E\left(x_1^{\alpha_1}\cdots x_{\lambda_1}^{\alpha_1}\, x_{\lambda_1+1}^{\alpha_2}\cdots x_{\lambda_1+\lambda_2}^{\alpha_2}\cdots x_{\sum^{h-1}\lambda_i+1}^{\alpha_h}\cdots x_{\sum^{h-1}\lambda_i+\lambda_h}^{\alpha_h}\right)$$

$$=\prod_i \mu_{\alpha_i}^{\lambda_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

依つて

$$E\left\{(\sum x_i^2)^h(\sum x_i)^{2(m-h)}\right\}$$

$$=\sum_{\Sigma\gamma_i=2m}\cdot\sum_{\Sigma\alpha_i=h}\frac{h!\ \overline{2(m-h)!}}{\prod\alpha_i!\ \prod(\gamma_i-2\alpha_i)!}\cdot\frac{n!}{\prod\lambda_i!}\prod\mu_{\gamma_i}^{\lambda_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$\therefore\ E(F^m)$

$$=\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{m}{h}\frac{\alpha^h(1+\alpha)^{m-h}}{n^{2m-h}}\cdot\sum_{\Sigma\gamma_i=2m}\cdot\sum_{\Sigma\alpha_i=h}\frac{h!}{\prod\alpha_i!}\frac{\overline{2(m-h)!}}{\prod(\gamma_i-2\alpha_i)!}\frac{1}{\prod\lambda_i!}\prod\mu_{\gamma_i}^{\lambda_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\doteqdot\frac{n!}{n^{2m}}\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{m}{h}\alpha^h(1+\alpha)^{m-h}n^h\sum_{\Sigma\gamma_i=2m}\cdot\sum_{\Sigma\alpha_2=h}\frac{h!}{\prod\alpha_i!}\frac{\overline{2(m-h)!}}{\prod(\gamma_i-2\alpha_i)!}\frac{1}{\prod_i\lambda_i!}\prod_{(\Sigma\gamma_i\lambda_i=2m)}\mu_{\gamma_i}^{\lambda_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

此の式に於て n を含むのは因数 $\dfrac{n^h}{\prod\lambda_i!}$ のみである

それ故函数の展開に於て n の最高冪は μ_2^m の項から来る。

$\therefore\ E(F^m)$

$$=\frac{n!}{n^{2m}}\sum_{h=0}^{m}(-1)^h\binom{m}{h}\alpha^h(1+\alpha)^{m-h}n^h\cdot\sum_{\Sigma\alpha_i=h}\frac{h!}{\prod\alpha_i!}\frac{\overline{2(m-h)!}}{\prod(\gamma_i-2\alpha_i)!}\frac{\mu_2^m}{m!(n-m)!}$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{n!}{n^{2m}} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \alpha^h (1+\alpha)^{m-h} n^h \sum \frac{h!}{\prod (1!)^h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{\prod (0!)^h (2!)^{m-h}}$$

$$\times \frac{\mu_2^m}{m!(n-m)!} \left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 0\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{n!}{n^{2m}} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \alpha^h (1+\alpha)^{m-h} n^h \binom{m}{h} \cdot \frac{h!\,\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}} \times$$

$$\frac{\mu_2^m}{m!(n-m)!} \left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) + 0\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{n^p}\left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$ とするなら

$E(F^m)$

$$= \frac{n!}{n^{2m}} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{n^h}{n^{ph}} \binom{m}{h} \frac{h!\,\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}} \frac{\mu_2^m}{m!(n-m)!} \left(1+0\frac{1}{n}\right)$$

$$+ 0\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$= \frac{n!}{n^{2m}} \sum_{h=0} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \frac{1}{n^{(p-1)h}} \frac{1}{(\cancel{\#}-m)!} \mu_2^m \left(1+0\frac{1}{n}\right)$$

$$+ 0\left(\frac{1}{N}\right)$$

此所で order を揃へる為

$$\alpha = \frac{1}{n-1}$$ とするなら

$E(F^m)$

$$= \frac{n!}{n^{2m}} \cdot \sum_{h=0} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \cdot \frac{\mu_2^m}{(n-m)!} \left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 0\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \left(\frac{\mu_2}{n}\right)^m \sum_{h=0} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

依つて

$$P_r\left\{ F \leq \lambda \sqrt[m]{E(F^m)} \right\} > 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

即

$$P_r\left\{ F \leq \lambda \frac{\mu_2}{n} \cdot \left(\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right\} > 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

$$\therefore P_r\left\{ |\overline{x} - \widetilde{x}|^2 \leq \frac{S^2}{n-1} + \lambda \frac{\mu_2}{n} \left(\sum (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right.$$

$$\left. \right\} > 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

$$\therefore P_r\left\{ |\overline{x} - \widetilde{x}| \leq \left\{ \frac{S^2}{n-1} + \lambda \frac{\mu_2}{n} \left(\sum (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\overline{2(m-h)!}}{2^{m-h}(m-h)!} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$> 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

を得る

今

$$K_m = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{\{2(m-h)\}!}{2^{m-h}(m-h)!}$$

とおくなら

$$P_r\left\{ F \leq \lambda \frac{\mu_2}{n} \cdot K_m^{\frac{1}{m}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right\} > 1 - \frac{1}{\lambda^m}$$

即

$$P_r\left\{ F \leq \lambda \cdot \frac{\mu_2}{n} \right\} > 1 - \frac{K_m}{\lambda^m} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\therefore \Pr\left\{ |\overline{x} - \tilde{x}| \leq \left(\frac{S^2}{n-1} + \lambda \frac{\mu_2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$> 1 - \frac{\sum_{h=0} (-1)^h \binom{m}{h} \frac{2(m-h)!}{2^{m-h}(m-h)!}}{\lambda^m} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

を得る

K_m の値を始めの幾つか記すなら

$K_2 = 2$

$K_3 = 8$

$K_4 = 60$

$K_5 = 544$

$K_6 = 6040$

$K_7 = 79008$

$K_8 = 1149080$

$K_9 = 20314876$

$K_{10} = 385135337$

$K_{11} = 8148295477$

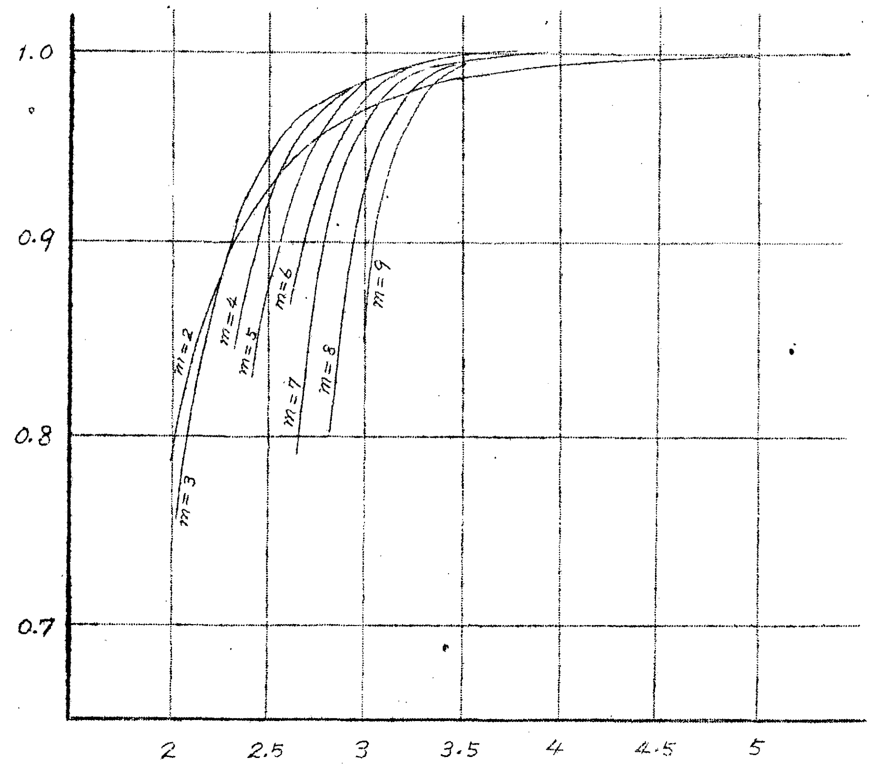
$K_{12} = 187778742235$

$K_{13} = 4702349031657$

此等の不等式の Confidence interval としての確率をみる爲保証する確率を次に記す但し expectation に於てである。

	2σ	2.449σ	2.646σ	3σ	3.317σ	4σ	5σ
m \ λ	3	5	6	8	10	15	24
2	0.7778	0.9200	0.9444	0.9688	0.9800	0.9911	0.9965
3	0.7037	0.9360	0.9630	0.9844	0.9920	0.9976	0.9994
4	0.2593	0.9040	0.9537	0.9854	0.9940	0.9988	0.9998
5		0.8259	0.9300	0.9834	0.9946	0.9993	0.99993
6		0.6134	0.8705	0.9770	0.9940	0.9995	0.99997
7			0.7178	0.9623	0.9921	0.9995	0.99998
8			0.3159	0.9315	0.9885	0.9996	
9				0.8486	0.9797	0.9995	

又 graph をあげるなら



である。

猶，詳しい図表が当研究室にあるから，来所されれば御覧に入れます。　本稿でも計算作図浄書等に小島嘉江，鈴木三千代両君の労を煩はした。　此処に厚く感謝の意を表する。