㉔ 函数方程式 $F(x, \theta_1+\theta_2) = F(F(x, \theta_1), \theta_2)$ について（I）

東京女高師　　工藤弘吉

前掲の〃母集団における変換と一様推定値について〃 §3,(3,4) で定義された表現函数が

(1) $$\gamma(\alpha \mid \theta_1+\theta_2) = \gamma(\gamma(\alpha \mid \theta_1) \mid \theta_2)$$

を満足し，且次の條件を満す函数であることがわかつた。

(2)
- i) $\gamma(\alpha \mid \theta)$ は $\alpha \in [0,1]$, $\theta \in [-\infty, \infty]$ で定義された二変数の函数
- ii) $\gamma(0 \mid \theta) = 0$, $\gamma(1 \mid \theta) = 1$ はすべての θ について成立
- iii) α の単調増加函数である
- iv) $\theta > 0$ で上に凸，$\theta < 0$ で上に凹，$\theta = 0$ で $\gamma(\alpha \mid \theta) = \alpha$ である。

函数方程式（1）は嘗て南雲先生等が〃数学紙上談話会〃 vol 57～59（昭和10年）に発表されたことがあるが iv）の條件はなかつた。ここでは iv）の條件を入れると如何なることが起きるかと去うことである。この問題を岩村聯氏にお話し后所立ち所にこの次に揭せられる様な方法でといて下さつたが，ここではただ私のやつた部分をのべておく。

問題　$x \in [0,1]$, $\theta \in [-\infty, \infty]$ で定義された函数 $F(x, \theta)$ が

(3) $\begin{cases} \text{i) } F(0,\theta)=0,\quad F(1,\theta)=1 \quad \textit{for all } \theta \\ \text{ii) すべての } \theta \text{ に関して } \alpha \text{ の単調増加函数である} \\ \text{iii) } \theta>0 \text{ ならば } \alpha \text{ の函数として上に凸, } \theta<0 \text{ なら} \\ \quad \text{ば上に凹, } \theta=0 \text{ ならば } F(x,\theta)=x \\ \text{iv) } F(F(x,\theta_1),\theta_2)=F(x,\theta_1+\theta_2) \end{cases}$

を満すとき $F(x,\theta)$ の性質は如何

定理 I　$F(x,\theta)$ は θ の函数として単調増加函数である $(0<x<1)$

証明 イ)　$\theta_1>0$ ならば (3), iii) の性質より

$$F(x,\theta)>x=F(x,0)$$

$\theta<0$ ならば (3), iii) より

$$F(x,\theta)<x=F(x,0)$$

ロ)　$\theta_1>\theta_2$ ならば $\theta_1-\theta_2>0$ であるから

$$F(x,\theta_1)=F(F(x,\theta_2),\theta_1-\theta_2)>F(x,\theta_2)$$

即ち単調増加である。

lemma　$[0,1]$ で単調増加連続上に凸な函数 $F(x)$ に対して（但し $F(x)\neq x$）

$$(4)\quad \begin{cases} F_0(x)=F(x) \\ F_{n+1}(x)=F(F_n(x)) \end{cases}$$

なる函数 $F_0(x), F_1(x), \text{-----}, F_n(x)\text{----}$ を作るとき

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=1.$$

（証明）単調増加函数 $F(x)$ は凸函数であるから $F(x)>x$ である：従つて

$$F_{n+1}(x) = F(F_n(x)) > F_n(x).$$

又, $F_n(x) \leqq 1$ であるから

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\infty(x)$$

が存在する。 もし $F_\infty(x_0) < 1$ とすると $F(x) > x$ より

$$(6) \qquad F(F_\infty(x_0)) > F_\infty(x_0)$$

ここに F は連続函数であるから

$$(7) \qquad F(F_\infty(x)) = F(\lim F_n(x)) = \lim F(F_n(x))$$

$$= \lim F_{n+1}(x) = F_\infty(x_0)$$

(6), (7) は矛盾する。 故に

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\infty(x_0) = 1$$

定 理 II　　ある x_0 ($0 < x_0 < 1$) に対して $F(x_0, \theta) > x$ $\theta > 0$ ならば, すべての x ($0 < x < 1$) に対して

$$\lim_{\theta\to\infty} F(x, \theta) = 1, \quad \lim_{\theta\to-\infty} F(x, \theta) = 0$$

(証 明) lemma によって $F(x, \theta) = F(x)$ とおけば $F_n(x) = F(x, n\theta)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} F(x, n\theta) = 1.$$

$F(x, \theta)$ は θ の単調函数であるから

$$\lim_{\theta\to\infty} F(x, \theta) = 1$$

又もし $\lim_{\theta\to\infty} F(x_0, -\theta) = F_{-\infty}(x_0) > 0$ とすると, 任意の ε に対して充分大きな N があり $n > N$ ならば

$$F(F_{-\infty}(x_0), n) \geqq 1-\varepsilon = F(1-\varepsilon, 0)$$

又 θ, $F(F(1-\varepsilon, -n), n) = 1-\varepsilon$ であるから

$$F_{-\infty}(x_0) \geqq F(1-\varepsilon, -n)$$

$n \to \infty$ とすると

$$F_{-\infty}(x_0) \geqq F_{-\infty}(1-\varepsilon)$$

$F_{-\infty}(x)$ は単調増加であるから $x_0 > 1-\varepsilon$. ε は任意であるから，この様なことはない。故に

$$F_{-\infty}(x) = \lim_{\theta \to \infty} F(x, -\theta) = 0 .$$

定理 III　すべての x について $F(x, \theta)$ は θ の連続函数である.

証明　$F(x, \theta) = F(F(x, \theta_0), \theta - \theta_0)$ であるから $\theta = 0$ で証明すればよい.

$\theta > 0$ とする $\left\{F\left(x, \frac{\theta}{n}\right)\right\}$ は，n について単調減小な函数列で $\geqq x$ であるから

(8)　$$F_0(x) = \lim_{n \to \infty} F\left(x, \frac{\theta}{n}\right)$$

が存在する。そして $F_0(x)$ も単調増加，連結，上に凸な函数で $\geqq x$ である。

もし $F_0(x) > x$ ならば，すべての n に対して

(9)　$$F\left(x, \frac{\theta}{n}\right) > F_0(x) > x$$

$F_n(x) = F(F_{n-1}(x))$ とおくと (9) より

$$F(x, \theta) = F(F(\cdots(F(x, \theta), \cdots)\theta) > F_n(x)$$

故に，すべての n に対して

$$F(x,\theta) > F_n(x)$$

$$\therefore \quad F(x,\theta) \geqq \lim F_n(x)$$

lemma よりこの右辺は $=1$ であるが $F(x,\theta) \leqq 1$ であるから

$$F(x,\theta) = 1$$

これは θ の定義に反する，故に

$$F_0(x) = x$$

即ち，（8）より

$$\lim_{n \to 0} F\left(x, \frac{\theta}{n}\right) = F(x,0)$$

$F(x,\theta)$ は単調函数であるから

$$\lim_{n \to 0} F(x,\theta) = F(x,0)$$

$F(x,-\theta) = y$ とおくと $F(y,\theta) = x$ であるから

$$x - F(x,-\theta) = F(y,\theta) - y \to 0 \qquad \theta \to 0$$

故に

$$\lim_{\theta \to 0} F(x,-\theta) = x.$$