(22) 正規回帰の有意性検定について

秋田大学学芸学部　宮澤光一

y を正規分布 $N(\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu a_\nu, \sigma^2)$ に従つて分布する確率変数とす。こゝに，a_ν, σ は未知の parameter, x_ν は確定変数なり。($\nu = 1, 2, \cdots, k$).

この母集団からとつた大きさ $n (\geqq k)$ の標本を下とす。

$$(y_1 \mid x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1k}a_k)$$
$$(y_2 \mid x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + \cdots + x_{2k}a_k)$$
$$\vdots$$
$$(y_n \mid x_{n1}a_1 + x_{n2}a_2 + \cdots + x_{nk}a_k)$$

今

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\mathcal{E}(Y) = XA$$

なり，

$rank\ X = k$ とし

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots\cdots x_{1K} \\ \vdots & \\ x_{K1} & x_{K2} \cdots\cdots x_{KK} \end{vmatrix} \neq 0$$

なる如く x の添字をつけるものとす。

$y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ の確率要素は下なり。

$$dF(y_1 \cdots y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \sum_{v=1}^{K} x_{iv} a_v)^2}{2\sigma^2}} dy_1 \cdots dy_n \qquad (1)$$

今，$a_1, a_2, \cdots, a_K$ の中の r. 個の parameter $a_{K-r+1}, \cdots\cdots, a_K$ が特定の値 $a_{K-r+1} = a^{\circ}_{K-r+1}, \cdots, a_K = a^{\circ}_K$ なりとの假設 H_0 を検定せんとす。

このとき，次の定理が成立することを示すのが目的なり。

［定　理］

確率変数（$y_1, \cdots, y_n$）に適当な一次変換を施して，確率変数（$Z_1, \cdots, Z_n$）にかえることにより

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{v=1}^{K} x_{iv} a_v)^2 \qquad (2)$$

を

$$S^2 = \sum_{i=1}^{K} (Z_i - \sum_{v=i}^{K} c_{iv} a_v)^2 + \sum_{i=K+1}^{n} Z_i^2 \qquad (3)$$

$$c_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

と表わすことが出来る。こゝに

各 Z_i は互に独立にして，　(4)

$$
\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}(z_i) &= \sum_{\nu=i}^{K} c_{i\nu} a_\nu \qquad (i = 1, 2, \cdots, K) \\
\mathcal{E}(z_i) &= 0 \qquad\qquad\quad (i = K+1, \cdots, n)
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

$$
z_i \text{ の variance は } \sigma^2 \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}
$$

をもつて正規分布をする確率変数なり。
而もこの一次変換の行列は符号を除いて一意に X から定まる。

この定理から直ちに次の系が得られる。

[系]

$a_1, a_2, \cdots, a_K$ を任意に動かして得られる S^2 の最小値 (absolute minimum) を S_a^2, $a^0_{K-r+1}, \cdots, a^0_K$ は固定し, $a_1, \cdots, a_{K-r}$ を任意に動かして得られる S^2 の最小値 (relative minimum) を S_r^2 ($\geqq S_a^2$) とし,

$$
S_r^2 = S_a^2 + S_b^2
$$

とおくとき, S_a^2/σ^2 と S_b^2/σ^2 とは, 互に独立に, 夫々自由度 $(n-k)$ 及び自由度 r の χ^2ー分布をする。
従つて Fー分布を用いて假設 H_0 を検定出来る。

[系 の 証 明]

定理が成立するとすれば, (3)をみて, S_a^2 は, (3)の右辺の第一項を最小にするように A をとることによつて得られる。
それには, $c_{ii} \neq 0$ なる故

$$
a_K = z_K c_{KK}^{-1} ,
$$

$$
a_{K-1} = (z_{K-1} - c_{K-1,K}\, a_K)\, c_{K-1,K-1}^{-1} , \quad \text{etc.}
$$

ととるとき，(3)の右辺の第一項は 0 となつて

$$S_a^2 = \sum_{i=K+1}^{n} z_i^2$$

を得る。而も各 z_i $(i=K+1, \dots, n)$ は，互に独立に，平均値 0，標準偏差 σ なる正規分布をする故，S_a^2/σ^2 は自由度 $(n-K)$ の χ^2－分布をする。

次に，S_r^2 を求めんに，假設 H_0 の下では，(3)の第一項は

$$\sum_{i=1}^{K-r}\left(z_i - \sum_{\nu=1}^{K-r} c_{i\nu} a_\nu - \sum_{\mu=K-r+1}^{K} c_{i\mu} a_\mu^0\right)^2 + \sum_{i=K-r+1}^{K}\left(z_i - \sum_{\nu=1}^{K} c_{i\nu} a_\nu^0\right)^2$$

となる故に，S_r^2 は，この第一項を 0 ならしめるように，$a_1, \dots, a_{K-r}$ をとることによつて得られ

$$S_r^2 = \sum_{i=K-r+1}^{K}\left(z_i - \sum_{\nu=1}^{K} c_{i\nu} a_\nu^0\right)^2 + \sum_{i=K+1}^{n} z_i^2$$

となる。よつて

$$S_b^2 = \sum_{i=K-r+1}^{K}\left(z_i - \sum_{\nu=1}^{K} c_{i\nu} a_\nu^0\right)^2$$

こゝに各 z_i $(i=K-r+1, \dots, K)$ は互に独立に，平均値 $\sum_{\nu=1}^{K} c_{i\nu} a_\nu^0$，標準偏差 σ の正規分布をなす故 S_b^2/σ^2 は，自由度 r の χ^2－分布をする。

又，z_i $(i=1, \dots, n)$ は互に独立なる故，S_a^2 と S_b^2 が互に独立なことは当然なり。　　　　q.e.d.

（定理の証明）

次の形の行列

$$
{}^{t}B = \begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1,K+1} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & & & & \\
b_{K1} & \cdots & b_{K,K+1} & \cdots & \cdots & b_{Kn} \\
b_{K+1,1} & \cdots & b_{K+1,K+1} & 0 & \cdots & 0 \\
b_{K+2,1} & \cdots & \cdots & b_{K+2,K+2} & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & 0 \\
b_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

をとつて，Y に一次変換を施して，

$$
BY = Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}
$$

と変える。

このとき，Z が次の条件を満すように，B が符号を除いて，一意に X から求まることを示さん。

［1］ $\mathcal{E}(Z) = CA$

こゝに，C は次の形の n 行K列の行列なり

$$
C = \begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1K} \\
0 & C_{22} & \cdots & C_{2K} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & C_{KK} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}, \quad C_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, K)
$$

これは，定理の（5）にあたる。

[2]　　$\mathcal{E}(Z_i) = \alpha_i$　とおくとき

$$\mathcal{E}(Z_i - \alpha_i)^2 = \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

これは，定理の（6）にあたる。

[3]　　$\mathcal{E}\{(Z_i - \alpha_i)(Z_j - \alpha_j)\} = 0\ ,\quad i \neq j$

$$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

各 Z_i は，y_i の一次結合として正規分布をなす故に，この条件は定理の（4）にあたる。

Zが上の三條件を満すようにすることは，行列 B が次の條件を満すように定めることゝ同値である。

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(BY) = B\,\mathcal{E}(Y) = BXA$$

なる故，條件 [1] の $\mathcal{E}(Z) = CA$ が成立つためには，

$$BXA = CA$$

が，Aの如何にかゝわらず成立すべき故

$$BX = C \tag{7}$$

なることである。　次に，

$$\mathcal{E}\left\{(Z_i-\alpha_i)(Z_j-\alpha_j)\right\} = \mathcal{E}\left[\left\{\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu}(y_\nu - \mathcal{E}(y_\nu))\right\}\left\{\sum_{\mu=1}^{n} b_{j\mu}(y_\mu - \mathcal{E}(y_\mu))\right\}\right]$$

$$= \mathcal{E}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} b_{j\nu}(y_\nu - \mathcal{E}(y_\nu))^2\right\}$$

$$+ \sum_{\nu \neq \mu}(b_{i\nu}b_{j\mu} + b_{i\mu}b_{j\nu})\,\mathcal{E}\left\{(y_\nu - \mathcal{E}(y_\nu))(y_\mu - \mathcal{E}(y_\mu))\right\}$$

$$= \sigma^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu}\, b_{j\nu}$$

よつて，條件［2］は，

$$\sigma^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu}^2 = \sigma^2$$

即ち，$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu}^2 = 1$．　$(i = 1, 2, \cdots, n)$

となることであり，

條件［3］は，$\displaystyle\sigma^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} b_{j\nu} = 0$　$(i \neq j)$

即ち　$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} b_{j\nu} = 0$　$(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$

となるところである。

こゝに，$b_{i\nu} = 0$　for　$i = K+1, \cdots, n-1,\ \nu = i+1, \cdots, n$

なることは勿論なり。

かくして，條件［2］，［3］は，

$$BB' = E \quad (B' \text{ はBの轉置行列を表す。}) \quad (8)$$

なこと，即ち，B が直交行列なことである。

よって，Z が上の三條件を満すようにするには，変換行列 B が(7)，(8)を満すように，X から定められれば宜しい。

そこで(7)の左から辺々 B' を乗ずれば

$$B'C = X$$

となる。

これを精しく書いてみれば，次の如し

$$\begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{K1} & b_{K+1,1} & b_{K+2,1} & \cdots & b_{n,1} \\
b_{12} & & b_{K2} & b_{K+1,2} & b_{K+2,2} & \cdots & b_{n,2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{1,K+1} & & b_{K,K+1} & b_{K+1,K+1} & b_{K+2,K+1} & \cdots & b_{n,K+1} \\
b_{1,K+2} & & b_{K,K+2} & 0 & b_{K+2,K+2} & \cdots & b_{n,K+2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\
b_{1,n} & \cdots & b_{K,n} & 0 & 0 & \cdots\ 0 & b_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1K} \\
0 & c_{22} & \cdots & c_{2K} \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & c_{KK} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2K} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nK} \end{pmatrix} \quad \text{なり} \qquad (9)$$

今， $B_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}, \ (i=1,2,\cdots,K)$; $B_{K+i} = \begin{pmatrix} b_{K+i,1} \\ b_{K+i,2} \\ \vdots \\ b_{K+i,K+i} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{(n-K-i)\text{行}} \end{pmatrix}, \ (i=1,2,\cdots,n-K)$

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad (i=1,2,\cdots,K)$$

とおく． 然るとき，次が成立す。

[Lemma 1]

$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_K$ は

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \alpha_{11} X_1 \\ B_2 &= \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 \\ &\ \vdots \\ B_K &= \alpha_{K1} X_1 + \alpha_{K2} X_2 + \cdots\cdots + \alpha_{KK} X_K \\ &\alpha_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots,K) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

の形に定まり， α_{ij} 及び行列 C の各要素 $C_{11}, \cdots\cdots, C_{1K}$;,

$C_{22}, \cdots\cdots, C_{2K}; \cdots\cdots; C_{KK}$, $(C_{ii} \neq 0 \quad for\ i=1,2,\cdots,K)$

は，與えられた X から符号を除いて一意に定まる。

（証　明）

帰納法で証するため，先づ B_1 を求めん。

そのため（9）の掛算を実行して両辺の第一列を比較すれば

$$C_{11} B_1 = X_1 \tag{11}$$

なことをみる。

而して $rank\ X = k$ なる故 $X_1 \neq 0$ にして，從つて

$$C_{11} \neq 0$$

$$\therefore \quad B_1 = C_{11}^{-1} X_1 \ , \quad \therefore \ B_1' = C_{11}^{-1} X_1'$$

これを辺々掛け算をして，B が直交行列なるべき故

$B_1' B_1 = 1$ なことを用いて，

$$C_{11}^{-2} X_1' X_1 = B_1' B_1 = 1$$

$$\therefore \quad C_{11}^2 = X_1' X_1$$

$\therefore \quad C_{11}$ は符号を除いて

$$C_{11} = \sqrt{X_1' X_1}$$

と定まる。

これを（11）に代入して，

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1' X_1}} X_1$$

即ち，　$B_1 = \alpha_{11} X_1$

$$こゝに \quad \alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{X_1' X_1}} \neq 0$$

と定まる。　次に

$$B_1 = \alpha_{11} X_1$$

$$B_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2$$

$$\vdots$$

$$B_\ell = \alpha_{\ell 1} X_1 + \alpha_{\ell 2} X_2 + \cdots + \alpha_{\ell\ell} X_\ell \quad ; (\ell \leqq k-1),$$

$$\alpha_{ii} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

且つ，$B_i' B_i = 1$，$B_i' B_j = 0 \quad (i \neq j \,;\, i, j = 1, 2, \cdots, \ell)$

なる如くに α_{ij}，及び $C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1\ell} \,;\, C_{22}, \cdots, C_{2\ell} \,;\, \cdots \,;\, C_{\ell\ell} \quad ; \quad C_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$

が符号を除いて一意に X から求まつたとするとき，$B_{\ell+1}$ が

$$B_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1,1} X_1 + \alpha_{\ell+1,2} X_2 + \cdots + \alpha_{\ell+1,\ell+1} X_{\ell+1} \;;\; \alpha_{\ell+1,\ell+1} \neq 0$$

の形で，$B_{\ell+1}' B_1 = B_{\ell+1}' B_2 = \cdots = B_{\ell+1}' B_\ell = 0,\; B_{\ell+1}' B_{\ell+1} = 1$

なる如くに $\alpha_{\ell+1,1}, \cdots, \alpha_{\ell+1,\ell+1}$ 及び $C_{1,\ell+1}, C_{2,\ell+1}, \cdots, C_{\ell+1,\ell+1} (\neq 0)$

が X から，符号を除いて一意に定まることを示さん。

そのために，(9)の掛算を実行して，両辺の第$(\ell+1)$列を比較すれば

$$C_{1,\ell+1} B_1 + C_{2,\ell+1} B_2 + \cdots + C_{\ell+1,\ell+1} B_{\ell+1} = X_{\ell+1} \tag{12}$$

なることをみる。

而して，$B_{\ell+1}$ は，$B_{\ell+1}' B_{\ell+1} = 1$，$B_i' B_{\ell+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$

なるべき故，(12) の両辺に左から

$$B_i' = \alpha_{i1} X_1' + \alpha_{i2} X_2' + \cdots + \alpha_{ii} X_i' \qquad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

を乗じて次を得る。

$$c_{i,\ell+1} = (\alpha_{i1}X_1' + \cdots + \alpha_{ii}X_i')X_{\ell+1} \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

又，(12)から，

$$C_{\ell+1,\ell+1}B_{\ell+1} = X_{\ell+1} - C_{1,\ell+1}B_1 - C_{2,\ell+1}B_2 - \cdots - C_{\ell,\ell+1}B_\ell$$

$$= X_{\ell+1} - C_{1,\ell+1}\alpha_{11}X_1 - C_{2,\ell+1}(\alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2)$$

$$- \cdots - C_{\ell,\ell+1}(\alpha_{\ell 1}X_1 + \cdots + \alpha_{\ell\ell}X_\ell)$$

即ち　$C_{\ell+1,\ell+1}B_{\ell+1} = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \cdots + \beta_\ell X_\ell + X_{\ell+1}$

と書ける。

而して，$X_1, X_2, \cdots, X_{\ell+1}$ は一次独立にして $X_{\ell+1}$ の係数は 1 なる故

$$C_{\ell+1,\ell+1} \neq 0,$$

なるべし。故に

$$B_{\ell+1} = C_{\ell+1,\ell+1}^{-1}(\beta_1X_1 + \cdots + \beta_\ell X_\ell + X_{\ell+1}) \tag{14}$$

よつて，C_{11} を定めたと同様にして，符号を除いて

$$C_{\ell+1,\ell+1} = \left\{(\beta_1X_1 + \cdots + \beta_\ell X_\ell + X_{\ell+1})'(\beta_1X_1 + \cdots + \beta_\ell X_\ell + X_{\ell+1})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

と求まる。これを(14)に代入すれば

$$B_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1,1}X_1 + \cdots + \alpha_{\ell+1,\ell}X_\ell + \alpha_{\ell+1,\ell+1}X_{\ell+1}$$

の形となり，$\alpha_{\ell+1,i}$ は，一意確定で，$(i = 1, 2, \cdots, \ell+1)$，

且つ，$\alpha_{\ell+1,\ell+1} = C_{\ell+1,\ell+1}^{-1} \neq 0$

なことを知る。

かくて，Lemma 1 が，証された。　　q.e.d.

このとき，$B_1, B_2, \cdots, B_K$ の決定された形(10)からみて，

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \cdots & b_{K1} \\ b_{12}, & b_{22} \cdots & b_{K2} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1K} & b_{2K} \cdots & b_{KK} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{KK} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2K} \\ \vdots & & \\ x_{K1} & x_{K2} \cdots & x_{KK} \end{vmatrix} \neq 0$$

なることを知る。一般に

$$D_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & & & & b_{1,K+i-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{K1} & \cdots & & & & b_{K,K+i-1} \\ b_{K+1,1} & \cdots & b_{K+1,K+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ b_{K+i-1,1} & \cdots & & & & b_{K+i-1,K+i-1} \end{vmatrix}$$

とおくとき次が成立す。

[*Lemma* 2]

B_{K+i} $(i = 1, 2, \cdots, n-k)$ が

$$B'_{K+i} B_1 = B'_{K+i} B_2 = \cdots = B'_{K+i} B_{K+i-1} = 0, \quad B'_{K+i} B_{K+i} = 1$$

且つ $D_1, D_2, \cdots, D_i$ は何れも 0 ならず

且つ $b_{K+i,K+i} \neq 0$

なる如く，符号を除いて，一意に X から求まる。

(証明)

先づ B_{K+1} を求めん。

$$\left.\begin{array}{ll} B'_{K+1}B_1=0 \text{ より} & b_{K+1,1}b_{11}+b_{K+1,2}b_{12}+\cdots\cdots+b_{K+1,K}b_{1K}=-b_{K+1,K+1}b_{1,K+1} \\ B'_{K+1}B_2=0 \text{ より} & b_{K+1,1}b_{21}+b_{K+1,2}b_{22}+\cdots\cdots+b_{K+1,K}b_{2K}=-b_{K+1,K+1}b_{2,K+1} \\ \vdots & \vdots \\ B'_{K+1}B_K=0 \text{ より} & b_{K+1,1}b_{K1}+b_{K+1,2}b_{K,2}+\cdots+b_{K+1,K}b_{K,K}=-b_{K+1,K+1}b_{K,K+1} \end{array}\right\}$$

これを，$b_{K+1,1},\cdots\cdots,b_{K+1,K}$ に関するK個の連立方程式と考えれば

その行列式は，$D_1 \fallingdotseq 0$ なる故

$b_{K+1,1}\cdots\cdots,b_{K+1,K}$ について解くことが出来，その解は，

$$b_{K+1,i} = \gamma_i b_{K+1,K+1} \qquad (i=1,2,\cdots,K)$$

の形をとる。 γ_i は X から定まる常数なり

よって，

$$1=\sum_{i=1}^{K+1} b^2_{K+1,i} = \left(\sum_{i=1}^{K}\gamma_i^2+1\right)b^2_{K+1,K+1}$$

従って又， $b_{K+1,i}$ $(i=1,2,\cdots,K)$ も一意に求まる。

次に，

B_{K+1}，$B_{K+2},\cdots\cdots,B_{K+\ell}$ $(\ell < n-k)$ が条件を満す如く求まり，且つ $D_1\cdot D_2\cdot\cdots\cdots\cdot D_\ell \fallingdotseq 0$ なる如く定まったとして，

$B_{K+\ell+1}$ を求めん。

$$B'_{K+\ell+1}B_1=0,\quad B'_{K+\ell+1}B_2=0,\cdots\cdots,\ B'_{K+\ell+1}B_{K+\ell}=0$$

より，次の $(k+\ell)$ 個の方程式を得る。

$$\begin{cases} b_{k+l+1,1}b_{11}+b_{k+l+1,2}b_{12}+\cdots\cdots+b_{k+l+1,k+l}b_{1,k+l} = -b_{k+l+1,k+l+1}b_{1,k+l+1} \\ \vdots \\ b_{k+l+1,1}b_{k1}+b_{k+l+1,2}b_{k2}+\cdots\cdots+b_{k+l+1,k+l}b_{k,k+l} = -b_{k+l+1,k+l+1}b_{k,k+l+1} \\ b_{k+l+1,1}b_{k+1,1}+b_{k+l+1,2}b_{k+1,2}+\cdots+b_{k+l+1,k+1}b_{k+1,k+1} = 0 \\ b_{k+l+1,1}b_{k+2,1}+b_{k+l+1,2}b_{k+2,2}+\cdots+b_{k+l+1,k+2}b_{k+2,k+2} = 0 \\ \vdots \\ b_{k+l+1,1}b_{k+l,1}+b_{k+l+1,2}b_{k+l,2}+\cdots+b_{k+l+1,k+l}b_{k+l,k+l} = 0 \end{cases}$$

これを $b_{k+l+1,i}$ $(i=1,2,\cdots,k+l)$ に関する方程式と考えて解かんに、この連立方程式の行列式は下なり。

$$D_{l+1} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots\cdots & b_{1,k+l-1} & b_{1,k+l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots\cdots & b_{k,k+l-1} & b_{k,k+l} \\ b_{k+1,1} & \cdots\ b_{k+1,k+1} & 0\ \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{k+l-1,1} & \cdots & b_{k+l-1,k+l-1} & 0 \\ b_{k+l,1} & \cdots\cdots & & b_{k+l,k+l} \end{vmatrix}$$

今、D_{l+1} の第 $(k+l)$ 列に $b_{k+l,k+l}$ を乗じて、$b_{k+l,k+l}D_{l+1}$ を作り、ついで、第一列に $b_{k+l,1}$ を、第二列に $b_{k+l,2}$ を、$\cdots\cdots$、第 $(k+l-1)$ 列に $b_{k+l,k+l-1}$ を乗じて、何れも第 $(k+l)$ 列に加えれば、第 $(k+l)$ 列にならぶ $(k+l)$ 個の数値は、

$$B'_{k+l}B_1=0,\ B'_{k+l}B_2=0,\cdots,B'_{k+l}B_{k+l-1}=0,\ \text{及び}\ B'_{k+l}B_{k+l}=1$$

なり。よつて次を得る。

$$b_{k+l,k+l}D_{l+1}=\begin{vmatrix} & D_l & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ b_{k+l,1} & \cdots\cdots & b_{k+l,k+l-1} & 1 \end{vmatrix}=+D_l \text{ or } -D_l$$

而して，$D_l \neq 0$ なる故

$$D_{l+1} \neq 0$$

よつて，上の連立方程式から，$b'_{k+l+1,i}$ $(i=1,2,\cdots,k+l)$ が定まり，その解は次の形なり

$$b_{k+l+1,i}=\delta_i \cdot b_{k+l+1,k+l+1} \qquad i=1,2,\cdots,k+l$$

こゝに δ_i は，X から定まる常数なり．
而して

$$b^2_{k+l+1,1}+\cdots\cdots+b^2_{k+l+1,k+l+1}=1$$

なることを用いて，前と同様にして，
$b_{k+l+1,i}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,k+l+1)$ が符号を除いて一意に定まり，且つ $b_{k+l+1,k+l+1} \neq 0$ なり。
即ち，B_{k+l+1} が條件に適する如くに一意に定まる。よつて帰納法により *Lemma 2* が証された。 q.e.d.

かくして，*Lemma 1, 2,* により，求める行列 B 及び C は符号を除いて一意に X から定まり，この直交行列 B を用いて，
Z ＝ BY と変換すれば

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{\nu=1}^{k}x_{i\nu}a_\nu\right)^2 \\ &= (Y-XA)'(Y-XA)=(Y-XA)'B'B(Y-XA) \\ &= (BY-BXA)'(BY-BXA) \\ &= (Z-CA)'(Z-CA) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(z_i - \sum_{\nu=i}^{k} c_{i\nu} a_\nu \right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} z_i^2$$

而も z'S が，定理の條件を満すことは，上の過程から明かなり。
よつて，定理が証明された。