④ Kollektiv 理論の基礎付け*

所員 松下嘉米男

周知の様に、R. von Mises は確率論を Kollektiv を基にして、組立てたが、そこに於ける彼の Kollektiv に対する randomness の條件、即ち凡ての Stellenauswahl に対して、各標識の相対頻度の極限が変らないといふ條件に関し、その様な條件を満足する Kollektiv の存在は不合理であるとの論難が起った。之は'凡ての'といふ言葉の意味に対する異る見解から起ったことゝ思はれる。実際 Auswahl といふ行為として可能な'凡て'といふ時は、それは可附番以上には出ないであらうが、一方思惟として可能な'凡て'といふ時は、連続の濃度を以て考へられるであらう。勿論 Mises 自身は前の意味で'凡て'といふことを考へたことは、彼の著書'Probability, Statistic and Truth'等より推察される。この様な状況に於て A. Wald の出した Kollektiv の存在定理は Kollektiv 理論の柱石となるのである。以下、この存在定理に基いて Mises の与へた算法を矛盾なく行ふには、如何なる様に Kollektiv を考へればよいか、換言すれば存在定理に基く Kollektiv 理論の新基礎付けについて述べようと思ふ。

1. 準備的な事柄

先づ、考へる標識の集合即ち標識空間を M で表はす。そして

Mの点列$\{m_i\}$に対する選出方式 *Auswahlvorschrift* をA.Wald に倣ひ、次の様な函数列$\{f_n\}$$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$によつて定義する。

i) f_0は0か1である

ii) f_n $(n\geqq 1)$ はn箇のMの積空間 $\underbrace{M\times M\times\cdots M}_{n}$ に於て定義され、その値として0と1とをとる函数である。

点例$\{m_i\}$に対して、選出方式$\{f_n\}$の定める選出は、第一番目のm_1は$f_0=1$なるとき選び出し第$n+1$番目のm_{n+1}は$f_n(m_1,m_2,\cdots\cdots m_n)=1$ なるときに選出するといふことによつて定められる。

一つの選出方式$\{f_n\}$で、凡てのf_nが1に等しいものを特に単位選出といふことにする。

次に、$f=\{f_n\}$, $g=\{g_n\}$ を二つの選出方式とする。この時任意の系列$\{m_i\}$に対し fを施し 之により選出された部分系列を$\{m_{i_j}\}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ とする。そこで

$$g'_0=g_0$$

$$g'_n=g'_n(m_1,m_2,\cdots m_n)=\begin{cases} g'_{n-1}(m_1,m_2,\cdots m_n)\ , & i_{j-1}<n<i_j \\ g_j(m_{i_1},m_{i_2},\cdots,m_{i_j}), & n=i_j \end{cases}$$
$$(n=1,2,\cdots\cdots)$$

の様に $\{g'_n\}$ を定義し

$$h_0=g'_0\,f_0\ ,$$

$$h_n=h_n(m_1,m_2,\cdots,m_n)=g'_n(m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n)\,f_n(m_1,m_2,\cdots,m_n)$$
$$(n=1,2,\cdots\cdots)$$

---

*) *Kollektiv* 理論に関しては 本講究録第3巻5号(昭和22年6月1日)林知己夫氏これくていふ序説参照

とおくと、$\{h\}$ は $\{m_i\}$ に対する一つの *Stellenauswahl* を定義する。

$\{m_i\}$ はMの任意の系列なる故、この様にして凡ての系列に対して　上記 $\{h\}$ なる *Auswahl* が定まる。故に之は一つの選出方式である。之を今、　で表はす。この h を f と g の積といひ、

$= g\cdot f$　と書き表はす。系列を K で表はし K に f を適用した結果を $f(K)$ にて表はせば、一般に

$$h(K) = g\cdot f\,(K)$$

である。この積に関しては、交換律は一般に成立しない。尚、單位選出を 1 にて表はせば、明かに

$$1\cdot f = f\cdot 1 = f$$

である。

又三つ以上の選出方式 $f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots\cdots, f^{(n)}$ があるときは、之等の積を *inductive* に定義する。即ち既に $n-1$ 箇の選出方式の積が定義出来たとするとき、n 箇の積は

$$f^{(1)}\cdot f^{(2)}\cdots\cdots f^{(n)} = f^{(1)}\left(f^{(2)}\cdots\cdots f^{(n)}\right)$$

によって定義する。そうすると、積に関する結合律は成立する。

選出方式の集合で、單位選出を含み、且つその任意の二つと同時に、それ等の積を含むとき、この集合を選出半群といふ。

次に、Mの部分集合の作る一つの集合体 $\mathfrak{F}$ があるとき、系列 $K=\{m_i\}$ に於て　$\mathfrak{F}$ に属する各集合 A に対し $\{m_i\}$ に於て、A に属する項の相対頻度の極限が存在するとする。この時、一

つの選出方式 f をこの系列に適用した結果が、矢張りこの性質を持ち、而も、各Aの相対頻度の極限がKに於けるものと等しい時、系列Kは選出方式 f を許容するといふ。そして選出方式の集合 $\mathfrak{S}$ があるとき、Kが $\mathfrak{F}$ に関し $\mathfrak{S}$ の各選出方式を許容するとき、Kを $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ に関する *Kollektiv* といひ、$\mathfrak{F}$ の各集合の相対頻度の極限を その集合の確率といふ。又 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ を特に明記する時には、Kを $K(\mathfrak{S}, \mathfrak{F})$ と書く。

さて $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ が如何なるとき、之等に関する *Kollektiv* が存在するかといふ問題が起るが、之に対する解答を A. Wald が与へたのである。それは、次のやうなものである。

定理(I). Mが無限集合なるとき Mの可附番箇の部分集合より成る集合体 $\mathfrak{F}_0$ の上に、確率測度 μ が定義されてゐるとする。このとき、Mに於て $\mathfrak{F}_0$ と μ に関し、*Peano-Jordan* の意味で *messbar* な集合の作る集合体を $\mathfrak{F}$ とする。更に、$\mathfrak{S}$ を *abzählbar* な選出方式の集合とする。そうすると、$\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ に関する *Kollektiv* でそこに於ける確率が μ によつて与へられるものが連続の濃度を以て存在する。

(II) Mが有限集合なるときは、$\mathfrak{F}$ として Mの凡ての部分集合より成る集合体をとつても、$\mathfrak{S}$ が *abzählbar* の選出方式より成る場合は、矢張り、$\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ に関する *Kollektiv* でそこに於ける確率が μ によつて与へられるものが連続の濃度で存在する。

(III) Mが無限集合なるとき、Mの凡ての部分集合の作る集合体

を　とする。又、$\mathfrak{N}$をabzählbarの選出方式の集合とする。その時、$\mathfrak{N}$と　に関するKollektivで、そこに於ける確率がμによつて与へられるものが存在する為の必要且　分條件は、何れの二つも相異る標識の列$\{m_i\}$（-öchstens abzählbar）で$\sum_i \mu(m_i)=1$となるやうなものが存在することである。

以下、この定理を基として、Kollektiv理論の展開に関し述べて行く。Kollektivに関する種々な算法の可能性は、その選出半群に依存することが大であるが、選出半群に関し　或は導出されたKollektivが如何なる選出半群を許容するかゞ　て如何なることが満足されゝばそれらの算法が可能であるか　その際に明かにされるであらう。

2、Kollektivの基礎算法

以下、Kollektiv $K(\mathfrak{N}, \mathfrak{f})$を考へるときは、$\mathfrak{N}$はabzählbar $\mathfrak{f}$は上記の定理によつて定められるやうなものとする。

I. Auswahl 之はKollektiv $K=K(\mathfrak{N},\mathfrak{f})$に$\mathfrak{N}$に属する選出方式を適用して、一つのKollektivを得る算法で、之が矢張り$\mathfrak{N}$と$\mathfrak{f}$に関するKollektivである為には、$\mathfrak{N}$が選出半群を成すか、又は$\mathfrak{N}$より erzeugen される選出半群をKが許容することが必要且充分である。この選出されたKollektivに於ける$\mathfrak{f}$の各集合の確率は、Kに於けるものと同じである。

II Mischung. Kollektiv $K=K(\mathfrak{N},\mathfrak{f})$に於て、$\mathfrak{f}$の二つの共通点の無い集合A, Bをとり、A, Bに属する標識を同一視し、それに一つの標識$\bar{m}$を与へると、こゝに新たに一つの標識

の系列 K′が出来る。この K′を作ることを K に於て A, B を混成するといふ。この時、f より A, B に属する標識を凡て標識 $\overline{m}$ で置き換へて得られる集合体を f′とする。特に M に於て A, B を混成したものを M′にて表はす。そうすると、M から M′への、この混成による対応に於ては、A・B に含まれない点については 1 対 1 であるが、A・B に含まれる点は凡て同一の点に対応する。今この対応を $m' = \varphi(m)$ と記す。そこで $\mathfrak{K}$ の一つの選出方式 $f = \{f_n\}$ をとり、M の一つの系列 $\{m_i\}$ に対し、系列 $\{\varphi(m_i)\}$ を考へ

$$f_{\varphi,0} = f_0$$

$$f_{\varphi,n}(\varphi(m_1), \varphi(m_2), \cdots \varphi(m_n))$$
$$= f_n(m_1, m_2, \cdots\cdots m_n)$$
$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

なる $f_\varphi = \{f_{\varphi,n}\}$ を考へると、之は $\{\varphi(m_i)\}$ に対する一つの選出を定義する。又 M′に於ける一つの選出方式 $f' = \{f'_n\}$ があるとき、任意の M の系列 $\{m_i\}$ に対し

$$f_0 = f'_0$$

$$f_n(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n) = f'_n(\varphi(m_1), \varphi(m_2) \cdots\cdots \varphi(m_n))$$
$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

なる $f = \{f_n\}$ を考へると、之は $\{m_i\}$ に対する一つの選出となる。この $\{f_n\}$ は、上の様にして、任意の系列によって定義される故、之は M に於ける一つの選出方式となる。今之を $f = \Phi_{M' \to M}(f')$ と記して表はす。一般

にMに於ける選出方式fより、上記の様にしてf_φをつくると、このf_φはM′に於ける元の意味に於ける選出方式にはならないがM′に於ける選出方式f'より出発すると

$$(\Psi_{M'\to M}(f'))_\varphi = f'$$

となる。さて

$$\mathfrak{F}' = \{ f' ; \Psi_{M'\to M}(f') \in \mathfrak{F} \}$$

とする。このとき$\mathfrak{F}$が着し選出半群ならば，$\mathfrak{F}'$も矢張り選出半群となる。そうして，K′は$\mathfrak{F}'$とf'に関する Kollektiv となる。このK′に於けるm'の確率は明かに

$$P_{K'}(m') = P_K(A) + P_K(B)$$

（こゝに$P_K(A)$, $P_K(B)$, $P_{K'}(m')$は夫々Kに於けるA, Bの確率K′に於けるm′の確率を表はすものとす。）

であり、それ以外のf'の集合に対しては、確率は変らない。

Ⅲ. Teilung　Kollektiv $K = K(\mathfrak{F}, f)$に於て、標識集合Mが二つ以上の点を含むとき、$P_K(A) \neq 0$なる$\mathfrak{f}$の元$A(\neq 0)$を考へ，KよりAに属する標識を順次抜き出すと、Aに属する標識のみより成る系列K′が出来るが、このK′が矢張り一つの Kollektiv を作る。このKよりK′を作る法を Teilung といふわけである。之を$K' = T_A(K)$によつて表はすことにする。そうすると、$\mathfrak{f}$の$A > B$なる元Bをとると、K′に於けるBに入る項の相対頻度の極限が存在し、それが$P_K(B)/P_K(A)$なることが容易にわかる。

次にKを$\{m_{ij}\}$ $(j=1,2,\cdots)$とし、$g=\{g_n\}$を一つの選出方式とする。そこで、標識点$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$に対し、この内Aに含まれるものを順次$P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots\cdots, P_{i_k}$とするとき

$$f_0 = g_0\ ,$$

$$f_n(p_1, p_2, \text{-----} p_n) = g_k(p_{i1}, p_{i2}, \text{-----}, p_{ik})$$

$$(n = 1, 2, \text{------})$$

と $\{f_n\}$ を定義し、之を f で表はす。今Mの元の任意の系列Kに関し，$K' = T_A(K)$ とすると

$$T_A\{f(K)\} = g(K') = g\{T_A(K)\}$$

となる。この様に、Aの元の系列に関する選出方式に対し、Mの元の系列に関する選出方式が考へられる。この対応を

$$f = \Phi_{A\to M}(g)$$

と記して表はすことにする。さて、f が $\mathfrak{S}$ に属すれば、$f(K)$ に於けるA, Bの相対頻度の極限は夫々，$P_K(A)$, $P_K(B)$ に等しく、従って、又 $g(K')$ に於けるBの相対頻度の極限が $P_K(B)/P_K(A)$ なることが知られる。即ち、この場合K'はBに関して g を許容するのである。そこで

$$\mathfrak{S}' = \{g\,;\,\Phi_{A\to M}(g) \in \mathfrak{S}\}$$

とする。そうすると、$T_A(f(K)) = g(K')$ なる関係より、K'は $\mathfrak{S}'$ の元を凡て許容する。又 $\mathfrak{S}$ が abzählbar ならば，$\mathfrak{S}'$ も abzählbar となる。尚，$\mathfrak{S}'$ は少くとも単位選出を含む故、空ではない。更に $\mathfrak{S}$ が選出半群を成す時 $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}'$, $f_1 = \Phi_{A\to M}(g_1)$, $f_2 = \Phi_{A\to M}(g_2)$ とすると、$f_1, f_2 \in \mathfrak{S}$ なる故 $f_1 \cdot f_2 \in \mathfrak{S}$. 今Mの元より成る任意の系列Kをとり、$K' = T_A(K)$ とすると、

$$g_1 g_2(K') = g_1\{g_2(T_A(K))\} = g_1[T_A\{f_2(K)\}] = T_A[f_1\{f_2(K)\}]$$
$$= T_A\{f_1 f_2(K)\}$$

従って，$g_1 g_2 \in \mathfrak{G}'$ 即ち $\mathfrak{G}'$ は選出半群をつくる。

そこで、$\mathfrak{f}$ に於て A及び A に含まれる集合より成る集合体(最大集合はA)を $\mathfrak{f}'$ とすると、$K' = T_A(K)$ は上記 $\mathfrak{G}'$ と $\mathfrak{f}'$ に関する Kollektiv で、$\mathfrak{f}'$ の各集合 B のそこに於ける確率は

$$P_{K'}(B) = \frac{P_K(B)}{P_K(A)}$$

となる。之は所謂 Bayes の法則である。こゝで、$P_K(B)$ は存在確率、事前確率、a priori の確率等，$P_{K'}(B)$ は原因の確率、事後確率、a posteriori の確率等と呼ばれるものである。

IV. Verbindung. 以上三つの算法は何れも一つの Kollektiv より一つの Kollektiv を導くものであるが Verbindung は二つ以上の Kollektiv より一つの Kollektiv を導く法である。今二つの Kollektiv $K_1 = K_1(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{f}_1) = \{m_i^{(1)}\}$, $K_2 = K_2(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{f}_2) = \{m_i^{(2)}\}$ があるとき，$(m_i^{(1)}, m_i^{(2)})$ なる組の作る系列 $K = \{(m_i^{(1)}, m_i^{(2)})\}$ を考へる。之は K_1, K_2 の標識空間を夫々 $M^{(1)}, M^{(2)}$ とすると、直積空間 $M^{(1)} \times M^{(2)}$ の点の系列である。そこで $M^{(1)} \times M^{(2)}$ に於ける $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}$ とするとき、K がこの $\mathfrak{f}$ と或る選出方式の集合 $\mathfrak{G}$ に関する Kollektiv をなすとき、K_1 と K_2 は (結合可能 verbindbar) であるといひ、K_1 K_2 より K を作ることを Verbindung といふ。そうすると、K_1 と K が verbindbar なるときは、K_1 に於て始めより n 項迄の中に $\mathfrak{f}_1$ の集

合 $A^{(1)}$ に入るものの数を $n_{A^{(1)}}$，更に，$A^{(2)}$ を F_2 の集合とするとき，K_1 と K_2 の Verbindung である K に於て，始めより第 n 項迄の中 $A^{(1)} \times A^{(2)}$ に入るものの数を $n_{A^{(1)} \times A^{(2)}}$ とするとき、

$$\frac{n_{A^{(1)} \times A^{(2)}}}{n} = \frac{n_{A^{(1)}}}{n} \cdot \frac{n_{A^{(1)} \times A^{(2)}}}{n_{A^{(1)}}}$$

に於て $n \to \infty$ とすると、左辺及び $\frac{n_{A^{(1)}}}{n}$ は極限を有する故 $\frac{n_{A^{(1)} \times A^{(2)}}}{n_{A^{(1)}}}$ も極限を持たなければならない。尤も、こゝで $P_K(A^{(1)}) \neq 0$ とする。さて $\frac{n_{A^{(1)} \times A^{(2)}}}{n_{A^{(1)}}}$ は、K_1 に於て、$A^{(1)}$ に入る項の表はれたとき、それに対する K_2 の項を抜き出して行き、その様にして得られる系列に於て、始めより第 $n_{A^{(1)}}$ 項迄に $A^{(2)}$ に入るものの相対頻度である。K_2 より、この様にして、部分系列を抜き出す法を $(K_1, A^{(1)})$ による抽出法といふ。之は今迄の Auswahl とは異るものである。

さて、上に述べた様に K_2 より $(K_1, A^{(1)})$—抽出により出来た系列の $A^{(2)}$ に関する相対頻度の極限は存在するが、之が K_2 に於ける $A^{(2)}$ の確率 $P_{K_2}(A^{(1)})$ に等しいと考へられる場合がある。K_1 に於て $\frac{n_{A^{(1)}}}{n}$ は勿論 $n \to \infty$ なるとき、$P_{K_1}(A^{(1)})$ に近づく故、この場合、K に於ける $A^{(1)} \times A^{(2)}$ の確率は $P_{K_1}(A^{(1)})$ と $P_{K_2}(A^{(2)})$ の積になる。

$$P_K(A^{(1)} \times A^{(2)}) = P_{K_1}(A^{(1)}) \cdot P_{K_2}(A^{(2)})$$

そこで今、$\mathfrak{F}_1$ の各 $f^{(1)}$ に対し

$$f_n^{(1)}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \cdots\cdots, m_n^{(1)}) = 1$$

但し $f_n^{(1)}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \cdots, m_n^{(1)}) = 0$ なるときは，$m_{n+1}^{(2)}$ は選び

なるとき、$m_{n+1}^{(2)}$ を選び出さないことにして、部分系列

$K_2=\{m^{(2)}_{i_j}\}$ $(j=1,2,\cdots\cdots)$ を作り、この K_2' に $(f^{(1)}(K_1),A^{(1)})$−抽出を適用して出来た系列 K_2'' に於て、f_2 の各 $A^{(2)}$ の相対頻度の極限が K_2 に於ける $A^{(2)}$ の確率に等しいとする。このとき、$K_2(\mathfrak{F}_2,f_2)$ は $K_1(\mathfrak{F}_1,f_1)$ に狭義に独立であるといふ。尚又、$\mathfrak{F}_1\ni f^{(1)}=\{f^{(1)}_n\}$ に対し

$$f_0=f_0'$$

$$f_n((m^{(1)}_1,m^{(2)}_1),(m^{(1)}_2,m^{(2)}_2),\cdots\cdots,(m^{(1)}_n,m^{(2)}_n))=f^{(1)}_n(m^{(1)}_1,m^{(1)}_2,\cdots\cdots,m^{(1)}_n)$$

$$(n=1,2,\cdots\cdots)$$

として、K に対する *Auswahl* $f=\{f_n\}$ を定める。一般にこの様にして定義される選出方式 f を $f^{(1)}$ の $M^{(1)}\times M^{(2)}$ に惹き起す選出方式といふ。この対応に於て、$f^{(1)}\rightarrow f$, $g^{(1)}\rightarrow g$ とすれば、明かに $f^{(1)}g^{(1)}\rightarrow f\cdot g$ である。そうすると、K_2 が K_1 に狭義に独立なるとき、それより前の様にして、K を作ると、之は $f_1\times f_2$ 及び $\mathfrak{F}_1$ の各選出の $M^{(1)}\times M^{(2)}$ に惹き起す選出方式凡てのなす選出半群 $\mathfrak{F}$ に関する *Kollektiv* をなし、こゝに於る $A^{(1)}\times A^{(2)}$ の確率は K_1 に於ける $A^{(1)}$ の確率と、K_2 に於ける $A^{(2)}$ の確率の積に等しい。(この場合、$P_{K_1}(A^{(1)})\neq 0$ ならば

$$\frac{n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}}{n}=\frac{n_{A^{(1)}}}{n}\cdot\frac{n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}}{n_{A^{(1)}}}$$

よりわかるが、$P_{K_1}(A^{(1)})=0$ でも、$f^{(1)}(K_1)=\{m^{(1)}_{i_j}\}$ $(j=1,2,\cdots)$, $K_2'=\{m^{(2)}_{i_j}\}$ $(j=1,2,\cdots\cdots)$ に於て、$f^{(1)}(K_1)$ 内に $A^{(1)}$ に属する項が現はれねば、$\frac{n_{A^{(1)}}}{n}=0$、従って又、当然 $n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}=0$ とな

る。故に，このときは

$$P_K(A^{(1)}\times A^{(2)})=0=P_{K_1}(A^{(1)})\cdot P_{K_2}(A^{(2)})$$

で成立するし、$f^{(1)}(K_1)$内に$A^{(1)}$に属する項が表はれる場合は、nを充分大きくとれば，$n_{A^{(1)}}\neq 0$にして

$$\frac{n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}}{n}=\frac{n_{A^{(1)}}}{n}\cdot\frac{n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}}{n_{A^{(1)}}}\leq\frac{n_{A^{(1)}}}{n}$$

故に、$n\to\infty$ なるとき、$\frac{n_{A^{(1)}}}{n}\to 0$ なる故、$\frac{n_{A^{(1)}\times A^{(2)}}}{n}\to 0$ となり、この場合も，$0=0$ で前の確率の積の式が成立する）即ち、K_2がK_1に狭義に独立なるときは、K_1とK_2とは *verbindbar* である。こゝで、この狭義の独立性の定義に於ては、K_2がK_1に独立でもそのことから直ちに、K_1がK_2に独立であるとは云へないのである。K_1がK_2にK_2がK_1に夫々狭義に独立なるとき、K_1とK_2は互に狭義に独立であるといふ。そうすると、$K(\mathfrak{S}_1, f_1)$と$K_2(\mathfrak{S}_2, f_2)$が互に狭義に独立なるときは、その *Verbindung* によって出来たKは、$M^{(1)}\times M^{(2)}$内に$\mathfrak{S}_1$及び$\mathfrak{S}_2$の各選出方式が惹き起す選出方式を許容する。

上に述べた二つの *Kollektiv* $K_1(\mathfrak{S}_1, f_1)$，$K_2(\mathfrak{S}_2, f_2)$の狭義の独立性の定義に於ては，*Kollektiv* の選出方式の集合を問題にしてゐる故、それが対称性を持たないのである。併し此処で、単に確率の値に表はれた所のみを見れば，K_2がK_1に狭義に独立なるときも、K_1がK_2に狭義に独立なるときも、共にK_1，K_2は *verbindbar* にして、その結合した結果のKに於ける

$A^{(1)} \times A^{(2)}$ ($A^{(1)} \in \mathfrak{f}_1$, $A^{(2)} \in \mathfrak{f}_2$) の確率は

$$(*) \quad P_K(A^{(1)} \times A^{(2)}) = P_{K_1}(A^{(1)})\, P_{K_2}(A^{(2)})$$

となる。唯二つの場合の異る所は，Kに於ける選出方式の集合としては、前の場合には、$\mathfrak{S}_1$の各元の $M^{(1)} \times M^{(2)}$ 内に惹き起すものの集合が，後の場合には、$\mathfrak{S}_2$の各元の $M^{(1)} \times M^{(2)}$ 内に惹き起すものの集合が考へられる所である。

そこで、今二つの Kollektiv $K_1(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{f}_1)$, $K_2(\mathfrak{S}_2, \mathfrak{f}_2)$ が verbindbar にして、その verbinden したKが，一つの選出方式の集合$\mathfrak{S}$と$\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$に関する Kollektiv で，而も(*)が成立するとする。そうすると、先づ、$\mathfrak{S}$の各元は $M^{(1)} \times M^{(2)}$ に於ける選出方式であるが，$M^{(1)} \times M^{(2)}$ に於ける選出方式は、$M^{(1)}$ の座標のみに着目すれば，$M^{(1)}$に於ける一つの選出方式を定義すると考へられる場合がある。この選出方式は、(*)に於て、$A^{(1)} \times A^{(2)}$ なる集合を考へて見ればわかる様に、K_1 に許容される。即ち，$\mathfrak{S}$の元で上記の様にして、$M^{(1)}$ に於て選出方式を定義するものがあれば、それらの $M^{(1)}$ に定義する選出方式の作る集合 $\mathfrak{S}_1'$ を K_1は許容する。同様に$\mathfrak{S}$の元で、上記の様にして、$M^{(2)}$ に於て選出方式を定義するものがあれば、それらの $M^{(2)}$に定義する選出方式の作る集合 $\mathfrak{S}_2'$をK_2は許容する。このことより、又 K_1, K_2は夫々 $(\mathfrak{S}_1', \mathfrak{f}_1)$, $(\mathfrak{S}_2', \mathfrak{f}_2)$ に関する Kollektiv であると見られる。そして又、逆に、$\mathfrak{S}_1'$ 或は $\mathfrak{S}_2'$ の各元の $M^{(1)} \times M^{(2)}$ に惹き起す選出方式の作る集合$\mathfrak{S}'$は$\mathfrak{S}$に含まれ、Kはこの$\mathfrak{S}'$と$\mathfrak{f}$ に関する Kollektiv であるとも考へ

られる。この様なことから、二つの Kollektiv $K_1(\mathfrak{X}_1, f_1)$, $K_2(\mathfrak{X}_2, f_2)$ が verbindbar で verbinden した Kollektiv に於て (*) が成立する場合、K_1 と K_2 は単に独立であるといふ。この様に独立の定義を修正するのである。そうすると、この独立性の定義は対称性を持つ。尚一般に，k 箇の Kollektiv $K_1(\mathfrak{X}_1, f_1)$, $K_2(\mathfrak{X}_2, f_2)$, ----, $K_k(\mathfrak{X}_k, f_k)$ があるとき、之が前と同じ様に verbinden 出来，その verbinden した Kollektiv $K(\mathfrak{X}, f)$, ($f = f_1 \times f_2 \times \cdots\cdots \times f_k$) に於ける $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots\cdots \times A^{(k)}$ ($A^{(1)} \in f_1, A^{(2)} \in f_2, \cdots\cdots, A^{(k)} \in f_k$) の確率と、各 K_i に於ける $A^{(i)}$ の確率との間に

$$P_K(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots\cdots \times A^{(k)}) = P_{K_1}(A^{(1)}) \cdot P_{K_2}(A^{(2)}) \cdots\cdots P_{K_k}(A^{(k)})$$

なる関係が成り立つ時 $K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ は互に独立であるといふ。

次に、二つの Kollektiv $K_1(\mathfrak{X}_1, f_1)$, $K_2(\mathfrak{X}_2, f_2)$ が必ずしも独立ではないが verbindbar で、その verbinden した Kollektiv を $K(\mathfrak{X}, f_1 \times f_2)$ とする。この時 $\mathfrak{X}$ の選出方式 f で、前記の様にして、$M^{(1)}$ に一つの選出方式 $f^{(1)}$ を定義するものをとり，K_2 に ($f^{(1)}(K_1), A^{(1)}$) 一抽出を施した系列に於て、$A^{(2)}$ に属する項の相対頻度の極限（之は $P_{K_1}(A^{(1)}) \neq 0$ なる時は常に存在する、$P_{K_1}(A^{(1)}) = 0$ なる時は、任意に定めておく）を $P'_{K_2}(A^{(2)} \mid A^{(1)})$ と記すと、容易に分る様に、

$$P_K(A^{(1)} \times A^{(2)}) = P_{K_1}(A^{(1)}) \cdot P'_{K_2}(A^{(2)} \mid A^{(1)})$$

なる関係が成立する。こゝで、$P'_{K_2}(A^{(2)} \mid A^{(1)})$ は、$M^{(1)}$ に選出方

式を定義する凡ての$\mathfrak{F}$の元fについて，同一の値を持つ。

尚，verbinden 出来ない様な二つの Kollektiv も当然考へられる。

以上四つの算法が Kollektiv に関する基本的な算法であるが、次に応用上重要な算法について述べる。

先づ、k箇の同一の集合体$\mathfrak{f}$に関する Kollektiv

$$K_1 = K_1(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{f}) = \{m_n^{(1)}\}, \cdots, K_k = K_k(\mathfrak{F}_k, \mathfrak{f}) = \{m_n^{(k)}\}$$

があるとき、この各々の項を、次の様に並べた系列 K を考へ、之が如何なる場合に Kollektiv をつくるかを考へる。

$$K = \{m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}, m_2^{(1)}, m_2^{(2)}, \cdots, m_2^{(k)}, m_3^{(1)}, m_3^{(2)} \cdots\}$$

そうすると，先づ K に於ける、$\mathfrak{f}$に属する任意の集合 A の相対頻度の極限は、明らかに

$$\frac{1}{k}\{P_{K_1}(A) + \cdots + P_{K_k}(A)\}$$

となる。そこで、K に対する選出fで、K の各項を始めから、k箇づゝ括って行った時その一纏めにしたものを同時に取るか、或は取らない様なものを考へる。即ち

$$\{(m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}), (m_2^{(1)}, m_2^{(2)}, \cdots, m_2^{(k)}), \cdots\}$$

に於て，括弧の中を一つに考へ、この括弧を引き抜くといふものを考へる。この時、$i = 1, 2, \cdots, k$ の各iに対し、K_iに属する項のみに注目した時、上の様にして抜き出す方式が$\mathfrak{F}_i$に属してゐるならば、明かに、K はfを許容する。詳しく、云へば、$f = \{f_n\}$に対して、

$$f_{lk+j}(m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}, m_2^{(1)}, m_2^{(2)}, \cdots, m_2^{(k)}, \cdots m_l^{(1)}, m_l^{(2)}, \cdots, m_l^{(k)},$$

$$m_{l+1}^{(1)}, m_{l+1}^{(2)}, \cdots, m_{l+1}^{(j)})$$

$$= f_{lk}(m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}, m_2^{(1)}, m_2^{(2)}, \cdots, m_2^{(k)}, \cdots, m_l^{(1)}, m_l^{(2)}, \cdots, m_l^{(k)})$$

$$(1 \leq j \leq k-1;\ l = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

が成立し

$$f_n^{(i)}(m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \cdots, m_n^{(i)}) = f_{nk}(m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}, \cdots, m_n^{(1)}, m_n^{(2)}, \cdots, m_n^{(k)})$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

によつて，各 K_i（$i = 1, 2, \cdots, k$）の選出方式 $f^{(i)} = \{f_n^{(i)}\}$ を定めたとき、凡ての i に対し、この K_i が $f^{(i)}$ を許容するならば、K は f を許容する。換言すれば，K は，少くとも上の様な選出方式 f に関する Kollektiv になる。例へば，$K_2, K_3, \cdots, K_k$ が $f^{(1)} \in \mathfrak{F}_1$ なる凡ての $f^{(1)}$ に対し、（$f^{(1)}(K), M$）一抽出を許容する場合，（こゝに M は標識空間）上記 K は，$\mathfrak{F}_1$ に対応する選出方式の集合に関する Kollektiv となる。最も簡單なる場合として、
$K_1 = K_2 = \cdots\cdots = K_k$ なる場合がある。

次に $K_1, K_2, \cdots, K_k$ が verbindbar の條件を、K に於て考へて見る。先づ $K_1, K_2, \cdots, K_k$ が verbindbar なる條件として、$\mathfrak{F}_1$ に屬する任意の $f^{(1)}$，f に屬する任意の $k-1$ 箇の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ に対し

(1) K_2 が（$f^{(1)}(K_1), A_1$）一抽出を許容する。

(2) K_2 に（$f^{(1)}(K_1), A_1$）一抽出を施した結果に於て，A_3 に含まれる項に対応する K_3 の項を抜き出す抽出法を

$(f^{(1)}(K_1), A_1; K_2, A_2)$—抽出とい　ことにすると，$K_3$は

$(f^{(1)}(K_1), A_1; K_2, A_2)$—抽出を許容する。

(3)　以下同様にして，K_iは$(f^{(1)}(K_1), A_1; K_2, A_2; \cdots; K_{i-1}, A_{i-1})$—抽出を許容する。$(i = 3, 4, \cdots, k)$

なるものがある。之を，Kに於て述べれば，次の様になる。

fに属する$k-1$箇の任意の集合$A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$に関し，次の様なKに対する一組の選出方式$g_{(0)} = \{g_{0,n}\}, g_{(1)} = \{g_{1,n}\}, \cdots, g_{(k-1)} = \{g_{k-1,n}\}$を考へる。即ち，

(i).　$g_{(0)}$に関しては，$\mathfrak{F}_1$に属する任意の一つの$g^{(1)} = \{g_l^{(1)}\}$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$をとり

$$g_{0, lk+j}(m_1^{(1)}, \cdots, m_1^{(k)}, \cdots, m_l^{(1)}, \cdots, m_l^{(k)}, m_{l+1}^{(1)}, \cdots, m_{l+1}^{(j)})$$

$$= \begin{cases} g_l^{(1)}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \cdots, m_l^{(1)}), & j = 0 \text{ なるとき} \\ 0, & 1 \leqq j \leqq k-1 \text{ なるとき} \end{cases}$$

$(l = 0, 1, 2, \cdots)$

(ii)　$g_{(\lambda)}$ $(0 < \lambda < k)$に関し

$$g_{\lambda, lk+j}(m_1^{(1)}, \cdots, m_1^{(k)}, \cdots, m_{l+1}^{(1)}, \cdots, m_{l+1}^{(j)})$$

$$= \begin{cases} 1, & j = \lambda,\ m_{l+1}^{(1)} \text{ が } g_{(0)} \text{ によつて選出され，且} \\ & m_{l+1}^{(1)} \in A_1, m_{l+1}^{(2)} \in A_2, \cdots, m_{l+1}^{(j)} \in A_j \text{ なるとき} \\ 0, & \text{同上でないとき} \end{cases}$$

$(l = 0, 1, 2, \cdots)$

このとき若し，この様な$g_{(0)}, g_{(1)}, \cdots, g_{(k-1)}$をKが常に許容するならば，$K_1, K_2, \cdots, K_k$は *verbindbar* にして，$f$の任意の$k$箇

の元 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_k$ に対し，その *verbinden* した *Kollektiv* に於ける $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_k$ の確率は

$$\frac{1}{k^k}\left(\sum_{i=1}^{k} P_{K_i}(A_1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k} P_{K_i}(A_2)\right)\cdots\cdots\left(\sum_{i=1}^{k} P_{K_i}(A_k)\right)$$

となる。特に，$P_{K_1}(A_i) = P_{K_2}(A_i) = \cdots\cdots = P_{K_k}(A_i)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ ならば，之は $P_{K_1}(A_1)\,P_{K_2}(A_2)\cdots\cdots P_{K_k}(A_k)$ となる。尚この *verbinden* した *Kollektiv* は $\mathfrak{M}_1$ の各元の $\underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k}$ に惹き起す選出方式を許容する。

一例として，応用上，重要なるものを述べると，上記 $K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ が，一つの *Kollektiv* $K = K(\mathfrak{M}, f) = \{m_n\}$ より，夫々

第1項，第 $k+1$ 項，第 $2k+1$ 項，$\cdots\cdots$ をとつたもの

第2項，第 $k+2$ 項，第 $2k+2$ 項，$\cdots\cdots$ 〃

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 〃

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 〃

第 k 項，第 $2k$ 項，第 $3k$ 項，$\cdots\cdots$ 〃

をとつたものなる場合である。この場合，$K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ が K より $\mathfrak{M}$ に属する選出によつて出来、且 $\mathfrak{M}$ が選出半群をなすとすると、$K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ も $\mathfrak{M}$ と f に関する *Kollektiv* でこゝに於ける f の各 A の確率は K に於けるものに等しい。又 $K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ を *verbinden* した *Kollektiv* は，K の項を始めより k 項づゝ括つて一つの項としたもので，こゝに於ける $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_k$ の確率は $P_K(A_1)\,P_K(A_2)\cdots\cdots P_K(A_k)$ となる。即ち，$K_1, K_2, \cdots\cdots, K_k$ は

独立となる。

さて、こゝで、今上に述べた様なKollektivが果してあるかという問題が起るが、之は前に述べたwaldの結果よりわかる。即ち、今、F_0を、標識空間Mに於ける、多くともabzählbarの元を持つ集合体とし、こゝに、$0 \leqq \mu(A) \leqq 1$, $\mu(M)=1$なる加法的函数$\mu(A)$が定義されてゐるとする。そして、Fを、このF_0とμに関しPeano-Jordanの意味でmessbarな集合体とする。更に、$\mathfrak{F}_0$を多くともabzählbarのMに於ける選出方式のなす半群とする。次に又、各正の整数kに対し、Mの元の任意の系列より

第一項，第$k+1$項，第$2k+1$項，----，第$nk+1$項，----

を抜き出す選出方式をa_kで表はす。そこで，$\mathfrak{F}_0$より任意に一つのfをとり、又F_0より任意に$k-1$箇の$A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$をとり、次の様な選出方式を考へる。即ち、

$1 \leqq i \leqq k-1$なる各iに関し、任意の系列$K=\{m_{(n)}\}$に対して、

$$(\ast)\ f^{(i)}_{\ell k+j}(m_1, m_2, \cdots m_{\ell k+j}) = \begin{cases} 1, & j=i,\ m_{\ell k+1}\text{が}\ f\cdot a_k\ \text{により，選出され、且}\\ & m_{\ell k+1}\in A_1,\ m_{\ell k+2}\in A_2, \cdots, m_{\ell k+i}\in A_i\ \text{なるとき，}\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(\ell=0,1,2,\cdots;\ j=0,1,2,\cdots,k-1)$$

なる選出方式$f^{(i)}=\{f^{(i)}_n\}$を考へる。さて、各a_kに対し、この様な選出方式の数は，f; $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$の取り方が多くても

abzählbar なる故、多くとも abzählar である。又一方 a_k の数は矢張り abzählbar なる故、結局上の様な選出方式は凡て abzählbar である。そこで、この様な選出方式凡てより作られる選出半郡を $\mathfrak{S}_0'$ とし、$\mathfrak{S}_0$ と $\mathfrak{S}_0'$ より作られる選出半群を $\mathfrak{S}$ とする。そうすると、$\mathfrak{S}$ は abzählbar の選出方式より成り、従って、前に述べた定理により、この $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ に関する Kollektiv で、そこに於ける $A\in\mathfrak{F}$ の確率が $\mu(A)$ となるものが連続の濃度で存在する。

今その様なものの一つを $K=\{m_n\}$ とし、任意の正の整数 k に対し、前の様に次の k 箇の K の部分列を考へる。

K_1' : K の第 1 項, 第 $k+1$ 項, 第 $2k+1$ 項, ‥‥

K_2' : K の第 2 項, 第 $k+2$ 項, 第 $2k+2$ 項, ‥‥

‥‥‥‥‥‥‥‥

－－－－－－－－－－－－

K_k' : K の第 k 項, 第 $2k$ 項, 第 $3k$ 項, ‥‥

そうすると、之等 $K_1', K_2', \cdots, K_k'$ は $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}_0$ の Kollektiv として、verbindbar になり、verbinden した Kollektiv K^* は、$\mathfrak{S}$ の $\underbrace{M\times M\times\cdots\times M}_{k}$ に惹き起す選出半群 $\mathfrak{S}^*$ と $\underbrace{\mathfrak{F}_0\times\mathfrak{F}_0\times\cdots\mathfrak{F}_0}_{k}$ に関するものである。そして、$A_1, A_2, \cdots, A_k\in\mathfrak{F}_0$ とすれば、この K^* に於ける $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ の確率は $P_K(A_1)\cdot P_K(A_2)\cdots P_K(A_k)$ とな

る。

さて、このK*は$\mathfrak{F}^*$と$\underbrace{\mathfrak{f}\times\mathfrak{f}\times\cdots\times\mathfrak{f}}_{k}$に関するKollektivでもある。それは、$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_k \in \mathfrak{f}$とすると、任意の正数$\varepsilon$ (<1)に対し、

$$A_i^0 \subset B_i \subset \bar{A}_i,\ A_i^0, \bar{A}_i \in \mathfrak{f}_0,\ \mu(\bar{A}_i - A_i^0) < \varepsilon$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$$

なる$A_1^0, \bar{A}_1, A_2^0, \bar{A}_2, \cdots\cdots, A_k^0\ \bar{A}_k$が存在する。そうすると，K*及びK*より$\mathfrak{F}^*$の元により選出された系列に於けるB$_1\times$B$_2\times\cdots\times$B$_k$に入る項の相対頻度の集積点は$\mu(A_1^0)\mu(A_2^0)\cdots\mu(A_k^0)$と$\mu(\bar{A}_1)\mu(\bar{A}_2)\cdots\mu(\bar{A}_k)$との間にある。そして、この二つの差は$k\varepsilon$より小さく、且$\varepsilon$は如何程でも小さくとれる故結局K*及びその$\mathfrak{F}^*$の元より選出された系列に於て、$B_1\times B_2\times\cdots\times B_k$に属する項の相対頻度の極限が存在し、之が$\mu(B_1)\mu(B_2)\cdots\mu(B_k)$に等しいことがわかる。故に、K*は$\mathfrak{F}^*$と$\underbrace{\mathfrak{f}\times\mathfrak{f}\times\cdots\mathfrak{f}}_{k}$に関するKollektivで

$$P_{K^*}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_k) = P_K(B_1)\cdot P_K(B_2)\cdots P_K(B_k)$$
$$B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathfrak{f}$$

である。尚このK*より再び上記の様な$K_1^{*\prime}, K_2^{*\prime}, \cdots K_k^{*\prime}$を作ると、其等はverbindbarである。

以上により、Kollektiv Kでそれより任意の正の整数kに対し前記$K_1', K_2', \cdots, K_k'$を作ったとき，それ等が独立なる（従って、verbindbar）ものが連続の濃度で存在することがわかる。

故にKollektivに基く確率論を展開する時は，Kollektivに関

し、四つの算法は勿論 上に述べた様なことは凡て成立することが必要である。即ち、Kollektiv $K(\mathfrak{F}, \mathfrak{f})$ に於て、$\mathfrak{f}$ は前に述べた様なもので、且つ $\mathfrak{F}$ は選出半群をなし、更に凡ての正整数 k に対し前記 a_k, 及び $\mathfrak{F}, f_0$ に関して $(\overset{*}{*})$ によって定義される選出方式の集合を $\mathfrak{F}^*$ とすると、K は $\mathfrak{F}$ と同時に $\mathfrak{F}^*$ も許容することを要する。

次に $K(\mathfrak{F}, \mathfrak{f})$ より $\mathfrak{F}$ に属する任意の k 箇の選出 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ によって $f_1(K)=K_1=\{m_n^{(1)}\}$, $f_2(K)=K_2=\{m_n^{(2)}\}, \cdots$, $f_k(K)=K_k=\{m_n^{(k)}\}$ を作ったとき、若し系列

$$\{m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \cdots, m_1^{(k)}, m_2^{(1)}, \cdots, m_2^{(k)} \cdots\}$$

が今述べた様な Kollektiv $\bar{K}(\mathfrak{F}, \mathfrak{f})$ ($\bar{K}$ は $\mathfrak{F}$ と同時に $\mathfrak{F}^*$ をも許容する。)を作れば、$K_1, K_2, \cdots, K_k$ は verbindbar で verbinden した Kollektiv は、$\mathfrak{F}$ の各元の $\underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k}$ に惹き起す選出方式の作る半群 $\mathfrak{F}^*$ と $\underbrace{\mathfrak{f} \times \mathfrak{f} \times \cdots \times \mathfrak{f}}_{k}$ に関する Kollektiv を成すことは明かである。之は換言すれば、$\mathfrak{f}$ の任意の $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ に対し、$f_2(K)$ が $(f_1(K), A_1)$ ― 抽出を許容し、$f_3(K)$ が $(f_1(K), A_1; f_2(K), A_2)$ ― 抽出を許容し、同様なことがづつと成立し最後に $f_k(K)$ が $(f_1(K), A_1; f_2(K), A_2; \cdots; f_{k-1}(K), A_{k-1})$ ― 抽出を許容する場合である。こゝに $(f_1(K), A_1; f_2(K), A_2; \cdots; f_i(K), A_i)$ ― 抽出とは先づ $(f_1(K), A_1)$ ― 抽出を施し、その結果に、更に $(f_2(K), A_2)$ ― 抽出を施し、以下同様にして行つて、

$(f_i(K); A_i)$ — 抽出並行ふ抽出を意味するものとする。

（以　上）

（昭和24年4月2日記）