(21) 函数方程式 $k(x)p(y)+q(x)+r(y)=F(x+y)$ と Koopman 型分布

東京女高師　工　藤　弘　吉

前に本誌上で「母集団における変換と一様推定値について」と云ふ題の下に，或種の変換を導入したが，それがすべての次元で成立するための必要充分條件は分布が一種の Koopman 型であることを証明した。然るにこのような変換があるとき，その場合の Koopman の函数を決定しようとしたところ，表題の如き函数方程式に遭遇した。この方程式は小平邦彦氏，岩村聯氏が殆ど解いてしまはれたので之を先づ紹介し，次に変換と Koopman の分布との関係を調べてみたい。

§ 1. 函数方程式 $k(x)p(y)+q(x)+r(y)=F(x+y)$ の解法

はじめに $k(x)$, $q(x)$ が一階微分可能として，函数方程式

(1) $$k(x)k(y)+q(x)+q(y)=F(x+y)$$

の岩村氏の解（私が少し改良したもの）を示さう。

一般に $f(x,y)$ が $x+y$ の函数であるための條件は

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

であるから，次の函数方程式を解くことになる。（1）の左辺に（2）を応用して

$$k'(x)k(y)+q'(x)=k(x)k'(y)+q'(y)$$

即ち

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} k(x) & k'(x) \\ k(y) & k'(y) \end{vmatrix} = g'(x) - g'(y)$$

従て次の方程式を解けば，（1）の解としての $k(x)$ が得られる。

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} k(x) & k'(x) & 1 \\ k(y) & k'(y) & 1 \\ k(Z) & k'(Z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

平面上で（ $k(x), k'(x)$ ），（ $k(y), k'(y)$ ），（ $k(Z), k'(Z)$ ） の三点が一直線上にあるための條件が（4）であるから

$$a k(x) + b k'(x) + c = 0$$

が得られる。こゝで a, b, c は常数である。

これは $k(x)$ に関する常数係数の線型一階微分方程式であるから，この解によつて（1）の解が幾通りか出来る。

イ)　a, b 共に零でないときは

$$k(x) = d e^{-\frac{a}{b}x} + \frac{c}{b} \qquad d：積分常数$$

ロ)　$a = 0$, $b \neq 0$ ならば

$$k(x) = -\frac{c}{b}x + d \qquad d：積分常数$$

ハ)　$a \neq 0$, $b = 0$ ならば

$$k(x) = -\frac{c}{a}$$

故に（4）の解は次の二つになる：

$$(\mathrm{I})\qquad k(x) = \alpha x + \beta \qquad \alpha, \beta：常数$$

$$(\mathrm{II})\qquad k(x) = \gamma e^{\alpha x} + \beta \qquad \alpha, \beta, \gamma：常数$$

この解を用いて（1）を解く。それは（3）をとけばよい。

（I） の場合は

$$\alpha^2(x-y) = g'(x) - g'(y)$$

$g'(0) = \eta$ とおくと

$$g'(x) = \alpha^2 x + \eta$$

（5） $$\therefore \quad g(x) = \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \eta x + \zeta \qquad \zeta：常数$$

（II）の場合は

$$\alpha\beta\gamma(e^{\alpha y} - e^{\alpha x}) = g'(x) - g'(y)$$

$$\therefore \quad g'(x) = \alpha\beta\gamma(1 - e^{\alpha x}) + \eta$$

（6） $$g(x) = -\beta\gamma e^{\alpha x} + (\alpha\beta\gamma + \eta)x + \zeta$$

ζ：常数

故に（1）の解は次の二つである。

（I） $k(x) = \alpha x + \beta, \quad g(x) = \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \eta x + \zeta$

この場合 $F(x) = \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + (\alpha\beta + \eta)x + \zeta.$

（II） $k(x) = \gamma e^{\alpha x} + \beta, \quad g(x) = -\beta\gamma e^{\alpha x} + \eta x + \zeta.$

（但し η は（6）における η とは異る。）

この場合 $F(x) = \gamma e^{\alpha x} + \eta x + 2\zeta + \beta^2.$

この（1）の解は $k(x), g(x)$ の一階微分可能性の仮定によつて解けたが，小平邦彦氏によれば微分可能性の代りに $k(x), g(x)$ の積分可能性を仮定すればよい。すなわち

（1）の両辺を a，b で y に関して平均する，即ち a から b まで y で積

分し，$b-a$ で割ると

(7) $$k(x)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b k(y)dy+q(x)+\frac{1}{b-a}\int_a^b q(y)dy=\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x+y)dy.$$

この右辺の積分変数を y から $t=x+y$ に変換すると，右辺は

$$\frac{1}{b-a}\int_{a+x}^{b+x}F(t)dt.$$

この函数は x の函数と見做すとき x で微分可能である。
又同様に(1)の両辺を c, d で y に関して平均すると

(8) $$k(x)\cdot\frac{1}{d-c}\int_c^d k(y)dy+q(x)+\frac{1}{d-c}\int_c^d q(y)dy=\frac{1}{d-c}\int_{c+x}^{d+x}F(t)dt$$

(7)の両辺から夫々(8)の両辺を引くと

(9) $$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b q(y)dy-\frac{1}{d-c}\int_c^d q(y)dy\right)$$
$$+k(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(y)dy-\frac{1}{d-c}\int_c^d k(y)dy\right)$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_{a+x}^{b+x}F(t)dt-\frac{1}{d-c}\int_{c+x}^{d+x}F(t)dt$$

(9)の右辺は微分可能な函数の差で微分可能．従って左辺も微分可能であるが，第一項及び第二項のカッコの中は夫々常数である故，$k(x)$ は微分可能となる。 従って(7)より $k(x)$ の微分可能性が出る。
以上をまとめて次の定理を得る。

定理 1. 函数方程式

$$k(x)k(y)+q(x)+q(y)=F(x+y)$$

は $k(x)$, $q(x)$ が積分可能であれば次の二種類の解がある.

(I) $\quad k(x)=\alpha x+\beta$, $\qquad q(x)=\frac{1}{2}\alpha^2x^2+\eta x+\zeta$

(II) $\quad k(x)=\gamma e^{\alpha x}+\beta$, $\qquad q(x)=-\beta\gamma e^{\alpha x}+\eta x+\zeta$

但し $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta$ は常数.

次に函数方程式

(10) $$k(x)p(y)+q(x)+r(y)=F(x+y)$$

をとく.

x と y とを交換して

(11) $$k(y)p(x)+q(y)+r(x)=F(x+y).$$

(10), (11) より

$$\begin{vmatrix} k(x) & p(x) \\ k(y) & p(y) \end{vmatrix}=\{r(x)-q(x)\}-\{r(y)-q(y)\}.$$

故に $k(x)$, $p(x)$ の間には

$$\begin{vmatrix} k(x) & p(x) & 1 \\ k(y) & p(y) & 1 \\ k(z) & p(z) & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{for all } x, y, z$$

なる関係がある。平面上の三点 $(k(x), p(x))$, $(k(y), p(y))$, $(k(z)\ p(z))$ が同一直線上にある條件が (12) であるから

(13) $$l\,k(x)+m\,p(x)+n=0$$

なる線型の関係が $k(x)$, $p(x)$ の間にある。

イ)　$l = 0$ なるときは　$p(x) = p$（常数），$k(x)$＝任意函数，

ロ)　$m = 0$ なるときは　$p(x)$＝任意函数，　$k(x) = k$（常数）

ハ)　$l \neq 0$，$m \neq 0$　なるときは方程式（13）は

$$(14) \qquad k(x) = m\,p(x) + n$$

としても一般性を失はない．

このイ)，ロ)，ハ) の場合，(10) の解を夫々求める。

イ）の場合．(10) は

$$p\,k(x) + q(x) + r(y) = F(x+y).$$

$p\,k(x) + q(x) = K(x)$ とおくと

$$K(x) = g(x) + K, \quad r(x) = gx + r$$

（但し $K = K(0)$，$r = r(0)$，且 g は常数）である。すなわち

$$p\,k(x) + q(x) = g(x) + K, \quad r(x) = gx + r.$$

即ちこの場合解は

$$p(x) = p \ (\text{常数}), \quad k(x) = \text{任意函数}$$

$$q(x) = gx + K - p\cdot k(x), \quad r(x) = gx + r.$$

ロ）の場合，イ）の場合と同様に解は

$$k(x) = k \ (\text{常数}), \quad p(x) = \text{任意函数}$$

$$q(x) = hx + q, \quad r(x) = hx + P - k\cdot p(x).$$

（但し h, q, P, k は常数）である。

ハ）の場合．　(14) を (10) に代入すると

$$p(y)\{m\,p(x) + n\} + q(x) + r(y) = F(x+y).$$

or.

$$m\cdot p(x)\cdot p(y) + q(x) + n\,p(y) + r(y) = F(x+y).$$

$n\cdot p(y) + r(y) = R_1(y)$ とおくと

(15)　　$m\cdot p(x)\cdot p(y)+q(x)+R_1(y)=F(x+y).$

(15)の x, y を交換したものを(15)から引くと

$$q(x)-R_1(x)=q(y)-R_1(y),$$

従つて，この式は x の値に無関係な常数である。即ち

$$q(x)=R_1(x)+t \qquad (t：常数).$$

故に(15)の両辺を m で割り，$\dfrac{R_1(x)}{m}=R(x)$ とし，$\dfrac{t}{m}$ を移項すれば

$$p(x)\cdot p(y)+R(x)+R(y)=\frac{F(x+y)-t}{m}$$

これは(1)の方程式に帰着する。故にその解は

(I)の場合は

$$p(x)=\alpha x+\beta\ ,\quad k(x)=m\alpha x+m\beta+n$$

$$R(x)=\frac{1}{2}\alpha^2x^2+\eta x+\zeta,\quad \therefore R_1(x)=\frac{1}{2}m\alpha^2x^2+m\eta x+\zeta$$

$$\therefore\ q(x)=\frac{1}{2}m\alpha^2x+m\eta x+m\zeta+t$$

$$r(x)=\frac{1}{2}m\alpha^2x^2+m\eta x+\zeta-n(\alpha x+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}m\alpha^2x^2+(m\eta-n\alpha)x+\zeta-n\beta$$

常数の整理をすると

$$p(x)=\alpha x+\beta,\quad k(x)=m\alpha x+m\beta+n,$$

$$q(x)=\frac{1}{2}m\alpha^2x^2+\eta x+\zeta$$

$$r(x)=\frac{1}{2}m\alpha^2x^2+(\eta-n\alpha)x+\lambda.$$

(II)の場合は，又常数を整理すると

$$p(x)=\gamma e^{\alpha x}+\beta,\quad k(x)=m\gamma e^{\alpha x}+\mu$$

$$q(x) = -m\beta\gamma e^{\alpha x} + m\eta x + \zeta$$

$$r(x) = -\mu\gamma e^{\alpha x} + m\eta x + \lambda.$$

故に次の定理を得る。

定理 II. 函数方程式

$$k(x)\cdot p(y) + q(x) + r(y) = F(x+y)$$

は $p(x)$, $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$ が積分可能であれば，次の四種の解をもつ：

(I) $k(x)=$任意函数, $p(x)=p$ (常数),

$q(x)=\alpha x+\beta-pk(x)$, $r(x)=\alpha x+\gamma$.

(II) $k(x)=k$ (常数), $p(x)=$任意函数

$q(x)=\alpha x+\beta$, $r(x)=\alpha x+\gamma-k\cdot p(x)$

(III) $k(x)=\alpha x+\beta$, $p(x)=\gamma x+\delta$,

$q(x)=\frac{1}{2}\alpha\gamma x^2+(\eta-\alpha\delta)x+\zeta$, $r(x)=\frac{1}{2}\alpha\gamma x^2+(\eta-\beta\gamma)x+\lambda$.

(IV) $k(x)=\gamma e^{\alpha x}+\beta$, $p(x)=\delta e^{\alpha x}+\eta$,

$q(x)=-\eta e^{\alpha x}+\zeta x+\lambda$, $r(x)=-\delta\beta e^{\alpha x}+\zeta x+\mu$.

系) 函数方程式

(16) $$k(x)\cdot p(y) + r(y) = F(x+y)$$

の解は次の三種である。

(I) $k(x)=k$ (常数), $p(x)=$任意函数, $r(x)=\gamma-k\cdot p(x)$

(II) $k(x)=\alpha x+\beta$, $p(x)=p$ (常数), $r(x)=\alpha\cdot p\cdot x+\gamma$.

(III) $k(x)=\gamma e^{\alpha x}+\beta$, $p(x)=\delta e^{\alpha x}$, $r(x)=-\delta\beta e^{\alpha x}+\mu$.

証明は定理 II に於て $g(x)\equiv 0$ とおけば得られる。

§2. 変換のある場合の Koopman 型分布

母集団 Ω の上の一対一 measurable 無限に分解可能な変換 σ が，すべての次元で P- dissipative なるとき適当な Ω の上の函数 $f(\omega|\theta)$ で

$$Q_\alpha=[\,\omega\,|\,f(\omega|\theta)>k\,]$$

を作るとき $\{Q_\alpha\}=\mathbb{R}$ が θ に無関係にならしめ得る。[1]
そのとき又

$$f(\sigma^{-\theta}\omega|\theta_1)f(\omega|\theta)=f(\omega/\theta+\theta_1)$$

となし得る。[2]　従って

$$(17)\qquad \frac{f(\sigma^{-\theta}\omega/\theta_1)}{f(\sigma^{-\theta}\omega/\theta_2)}=\frac{f(\omega/\theta+\theta_1)}{f(\omega/\theta+\theta_2)}$$

又 σ がすべての次元で P- dissipative であるから，Koopman の分布

$$\log f(\omega/\theta)=k(\omega)p(\theta)+q(\theta).$$

が出る。従って（17）より

$$(18)\qquad \{k(\sigma^{-\theta}\omega)p(\theta_1)+q(\theta_1)\}-\{k(\sigma^{-\theta}\omega)p(\theta_2)+q(\theta_2)\}$$

$$=\{k(\omega)p(\theta+\theta_1)+q(\theta+\theta_1)\}-\{k(\omega)p(\theta+\theta_2)+q(\theta+\theta_2)\}.$$

$p(\theta_1+\theta)-p(\theta_2+\theta)=P(\theta)$, $q(\theta_1+\theta)-q(\theta_2+\theta)=Q(\theta)$ とおけば（18）は

1）本誌 Vol. 5 NO.　　　　参照

$$k(\sigma^{-\theta}\omega)P(0)+Q(0)=k(\omega)P(\theta)+Q(\theta).$$

$\tau=\sigma^{-1}$ とおくと

(19) $$k(\tau^{\theta}\omega)P(0)+Q(0)=k(\omega)P(\theta)+Q(\theta).$$

故に dissipative な変換 σ があれば函数 $k(\omega), P(\theta), Q(\theta)$ がこの函数方程式を満さなければならない。

今 Ω の上の次の條件を満たす函数 $u(\omega)$ が存在するとする。

i) $u(\tau^{\theta}\omega)=u(\omega)+\theta$

ii) $k(\omega)=K(u(\omega))$ なる実変数函数 $K(\omega)$ がある。

この場合 (19) より $K(u), P(\theta), Q(\theta)$ は次の函数方程式を満足する。

$$K(u+\theta)P(0)+Q(0)=K(u)P(\theta)+Q(\theta)$$

この方程式は,定理Ⅱ,系) (16) の方程式であるから,その解は次の三つの場合がある。

(Ⅰ) $K(u)=k,$ $P(\theta)=$ 任意函数 , $Q(\theta)=\gamma-k P(\theta)$

(Ⅱ) $K(u)=\alpha u+\beta,$ $P(\theta)=p$, $Q(\theta)=\alpha p\theta+\gamma$

(Ⅲ) $K(u)=\gamma e^{\alpha u}+\beta,$ $P(\theta)=\delta e^{\alpha\theta}$, $Q(\theta)=-\delta\beta e^{\alpha\theta}+\mu$

但し $k, p, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ は θ_1, θ_2 のみの函数である。

(Ⅰ) $P(\theta)$ は任意であるから従って $p(\theta)$ は任意函数, $K(u)$ は θ_1, θ_2 に関係ない函数であるから, k は θ_1, θ_2 を含まない。
又第三式は

$$q(\theta_1+\theta)-q(\theta_2+\theta)=\gamma(\theta_1,\theta_2)-k\{p(\theta_1+\theta)-p(\theta_2+\theta)\}$$

であるから　$\theta_2 = \theta = 0$，θ_1 の代りに θ とし
$\gamma(\theta) = \gamma(\theta, 0)$ とおくと

$$q(\theta) = \gamma(\theta) - k\{p(\theta) - p(0)\} + q(0)$$

故に $q(\theta)$ は任意函数でよい。即ち $q(\theta) + kp(\theta) = s(\theta)$ とおけば

$$f(\omega/\theta) = e^{k \cdot p(\theta) + q(\theta)} = e^{s(\theta)}$$

故に $f(\omega/\theta)$ は ω を含まない non negative な θ の函数である。

$$1 = \int_\Omega f(\omega/\theta) dP(\omega) = e^{s(\omega)} \int_\Omega dP(\omega) = e^{s(\omega)}$$

であるから　$s(\theta) \equiv 0$.　即ち

$$f(\omega|\theta) \equiv 1 \quad \text{for all } \theta.$$

となる。即ち measure P に関して γ が measure preserving transformation なるときである。

しかし，この場合は分布は θ に関係ないから問題にするに及ばない。

（II）　$K(u) = \alpha u + \beta$ も θ_1，θ_2 に無関係であるから α, β も θ_1，θ_2 を含まない。又

$$(20') \qquad p(\theta_1 + \theta) - p(\theta_2 + \theta) = P(\theta) = p(\theta_1, \theta_2)$$

を解く．　$\theta_2 = 0$　として一般性を失はない．又
$p(\theta_1, \theta_2) = p(\theta_1) - p(\theta_2)$ だから

$$p(\theta_1 + \theta) - p(\theta) = p(\theta_1) - p(0)$$

或は

$$p(\theta_1) + p(\theta) = p(\theta_1 + \theta) + p(0)$$

即ちその解は（$p(\theta)$は measurable とする）

$$p(\theta)=A\theta+B.$$

次に

$$q(\theta_1+\theta)-q(\theta_2+\theta)=Q(\theta)=\alpha A(\theta_1-\theta_2)\theta+\gamma(\theta_1,\theta_2)$$

故に

$$\gamma(\theta_1,\theta_2)=q(\theta_1)-q(\theta_2)=Q(0).$$

この方程式は $\theta_2=0$ のとき解けばよい，

(21.) $$q(\theta_1+\theta)+q(0)=\alpha A\theta_1\theta+q(\theta_1)+q(\theta).$$

これは，定理Ⅰの特別な場合で，$q(\theta)$ が積分可能ならば

$$q(\theta)=\frac{1}{2}\alpha A\theta^2+\eta\theta+\zeta.$$

故に，この場合は

(22) $$\log f(\omega|\theta)=(\alpha u(\omega)+\beta)(A\theta+B)+\frac{1}{2}\alpha A\theta^2+\eta\theta+\zeta.$$

常数の整理をすれば

(23) $$\log f(\omega|\theta)=\frac{1}{2}\alpha(u+\theta+\beta)^2-\frac{1}{2}\alpha u^2+\eta\theta+\zeta$$

（勿論（23）の常数 α,β,η,ζ は（22）の α,β,η,ζ とは異る），
或は

$$=\frac{1}{2}\alpha u(\theta+\beta)+\frac{1}{2}\alpha\theta^2+\eta\theta+\zeta.$$

平均のみ異る正規分布はこの例である．

（Ⅲ）　$K(u)=\gamma e^{\alpha u}+\beta$ は θ_1,θ_2 に関係ない。故に α,β,γ は θ_1,θ_2 に関係ない。

$$p(\theta_1+\theta)-p(\theta_2+\theta)=P(\theta)=\delta e^{\alpha\theta}$$

故に
$$\delta = p(\theta_1) - p(\theta_2)$$
$$p(\theta_1+\theta) - p(\theta_2+\theta) = e^{\alpha\theta}\{p(\theta_1) - p(\theta_2)\}.$$
$\theta_2 = 0$ としても一般性を失はないから
$$p(\theta_1+\theta) = e^{\alpha\theta}\{p(\theta_1) - p(0)\} + p(\theta).$$
これは，定理Ⅱ系）の特別な場合で，解（Ⅲ）の場合である．故に
$$p(\theta) - p(0) = \gamma' e^{\alpha\theta} + \beta', \quad p(\theta) = -\beta' e^{\alpha\theta} + \mu'.$$
従って $\gamma' = -\beta'$ である．故に β' の代りに $-\beta'$ とすると
$$p(\theta) = \beta' e^{\alpha\theta} + \mu'$$
$$\therefore \delta = \beta(e^{\alpha\theta_1} - e^{\alpha\theta_2}).$$
又
$$q(\theta_1+\theta) - q(\theta_2+\theta) = Q(\theta) = -\beta\beta'(e^{\alpha\theta_1} - e^{\alpha\theta_2})e^{\alpha\theta} + \mu(\theta_1, \theta_2).$$
故に
$$\mu(\theta_1, \theta_2) = \{q(\theta_1) + \beta\beta' e^{\alpha\theta_1}\} - \{q(\theta_2) + \beta\beta' e^{\alpha\theta_2}\}$$
故に $q(\theta) + \beta\beta' e^{\alpha\theta} = L(\theta)$ とおけば
$$L(\theta_1+\theta) - L(\theta_2+\theta) = L(\theta_1) - L(\theta_2)$$
$\theta_2 = 0$ とおくと
$$L(\theta_1+\theta) + L(0) = L(\theta_1) + L(\theta).$$
即ち $q(\theta)$．従って $L(\theta)$ が measurable とすると
$$L(\theta) = C\theta + D.$$
故に $\beta\beta'$ を改めて $-\lambda$ とおくと
$$q(\theta) = \lambda e^{\alpha\theta} + C\theta + D.$$

故にこの場合は

$$\log f(\omega/\theta) = (\gamma e^{\alpha u(\omega)} + \beta)(\beta' e^{\alpha\theta} + \mu') + \lambda e^{\alpha\theta} + C\theta + D.$$

分散のみ異る正規分布はこの例である。

$$\log f(\omega/\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2 + \frac{1}{2}(x-m)^2 + \log\sigma$$
$$= -\frac{1}{2}(\sigma^{-2}-1)(x-m)^2 + \log\sigma$$

故に $\theta = -\log\sigma$, $\log(x-m) = u$ とおくと

$$\log f(\omega/\theta) = -\frac{1}{2}(e^{2\theta}-1)\cdot e^{2u} - \theta.$$

先に Ω の上の実函数 $u(\omega)$：

i) $u(\tau^\theta\omega) = u(\omega) + \theta.$

ii) $k(\omega) = K(u(\omega))$ なる実変数函数 $K(u)$ が存在する.

が存在することを仮定した。然るに dissipative な変換 σ があるときは，本誌 により α-quartile estimation $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ が作られたのであるが，それが

$$\hat{\theta}_\alpha(\sigma^\theta\omega) = \hat{\theta}_\alpha(\omega) + \theta$$

であつたから $u(\omega) = -\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ とおくと $\tau = \sigma^{-1}$ に対して

$$u(\tau^\theta\omega) = -\hat{\theta}_\alpha(\tau^\theta\omega) = -\hat{\theta}_\alpha(\sigma^{-\theta}\omega) = -\hat{\theta}_\alpha(\omega) + \theta$$
$$= u(\omega) + \theta$$

故に i) を満足する。

更に $[\omega \mid -\hat{\theta}_\alpha(\omega) \geqq k] = Q_k \in \mathbb{R}$ であるから

$$[\omega \mid f(\omega|\theta) \geqq k] = [\omega \mid \log f(\omega|\theta) \geqq \log k]$$
$$= [\omega \mid k(\omega) \geqq \frac{1}{p(\theta)}\{\log k - q(\theta)\}]$$

より $u(\theta)$ の逆対応を $u^{-1}(u)$ とすると，即ち $u^{-1}(u) = [\omega \mid u(\omega) = u]$

とすると

$$\omega \in u^{-1}(u) \text{ なら } K(u) = k(\omega)$$

とおけば

$$K(u(\omega)) = k(\omega)$$

故に ii) を満足する。

上のことより

定理 III　すべての次元で σ が P-dissipative なら，分布は次の二つの場合に限られる：

$$(\text{I}) \quad \log f(\omega|\theta) = \alpha\theta^2 + \alpha\theta u(\omega) + \beta u(\omega) + \gamma\theta + \delta$$

$$(\text{II}) \quad \log f(\omega|\theta) = (\gamma e^{\alpha u(\omega)} + \beta)(\gamma' e^{\alpha\theta} + \beta') + C\theta + D.$$

或は Koopman 型函数 $e^{k(\omega)p(\theta)+q(\theta)}$ とすれば

$$(\text{I}') \quad k(\omega) = \alpha u(\omega) + \beta,\ \ p(\theta) = A\theta + B,\ \ q(\theta) = \frac{1}{2}\alpha A\theta^2 + \eta\theta + \zeta.$$

$$(\text{II}') \quad k(\omega) = \gamma e^{\alpha u(\omega)} + \beta,\ p(\theta) = \gamma' e^{\alpha\theta} + \beta',\ \ q(\theta) = \lambda e^{\alpha\theta} + C\theta + D.$$