⑬ 一般統計推論について　（続）

所員　松下嘉米男

前に本講究録第三巻第十七—十八号に於て、一般統計推論について述べたが、最近又、A.Wald がその基礎假定に関し述べてゐる*)のを見たので、それに倣つて、前に述べた基礎假定を少しく変更して述べてみる

假定 1. Sample space R に関する假定は前のと同じとする。即ち

i) R : topological space.

ii) R の部分集合より成る一つの σ 系 $\mathfrak{B}$ に Lebesgue 式測度 $m(E)$ $(E \in \mathfrak{B})$ が定義されてゐる。

iii) $\mathfrak{B}$ の屬する bicompact な、単調増大な集合列 $\{R_n\}$ で R に収斂するものがある。

假定 2. Ω を $\mathfrak{B}$ の上で定義された分布函数の集合とする。

i) Ω は或る一つのヒルベルト空間の一つの compact な部分集合を作る。

ii) $\Omega \ni X$ とすると、

---

*) A. Wald, An Essentially Complete Class of Admissible Decision Functions. Ann. Math. Statis. Vol. 18 (1947).

$$X(E)=\int_E P(X, t)\,dm \quad (t\text{はRの点を表はす})$$

と書け、こゝで $P(X, t)$ は $\Omega \times R$ に於て連続とする。

$\mathfrak{F}$ を Ω に於て、例へば *open set* より *erzeugen* されるσ系とする。又、S を Ω の部分集合 ω の成る集合とし、問題にしてゐる'*true*'な分布函数が ω に含まれるといふ假設を H_ω で表はし H_ω の集合を $\mathfrak{H}_S$ と記す。問題は得られた *sample point* より如何なる H_ω を *accept* するかといふことであるが、今 H_ω を *accept* することを定めることを d、この様な d の集合を D により表はせば、問題は R より D への'うまい'寫像を求めることである。この'うまい'といふ意味を定める爲に、前に述べた様に *weight function* $W(X, d)$ を考へる。この $W(X, d)$ は有界、例へば1より小さいとする。次に、D に *topology* を入れる。

d_m $(m=1, 2, \cdots\cdots)$, d, $\in D$ に対し、

X に一様に、$W(X, d_m) \to W(X, d)$

なるとき、$\{d_m\}$ は d に收斂するといふ。

そうすると、

假定 3. D は上の位相に関し *compact* であり、$W(X, d)$ は各 d に対し、X の連続函数となる。

以下、$\mathfrak{F}$ に於ける分布 μ としては、$\int_\Omega W(X, d)\,d\mu$ が d に関し、恒等的に0にならないやうなもののみを考へることにする。

假定 4. R より或る *measure* 0 の集合 N をとり除いた集合よりの任意の一点 t、$\mathfrak{F}$ の一つの分布 μ に対して、

$$\int_\Omega W(X, d)\, p(X, t)\, d\mu$$

を最小にする様な d は唯一つ存在する。

以上の假定の許に、前に述べた主な結果が得られる。

即ち、

前に述べた意味で *optimum decision function* が存在する。

この o. d. f. は *maximum risk* を最小にするものである。

この o. d. f. に対する *risk function* は λ を *least favorable distribution* とするとき、

$$\Omega_\lambda = \{ X ;\ \text{open } \omega \ni X \rightarrow \int_\omega d\mu > 0 \}$$

に於て常数になる。

辨 明

証明は前に述べたと大体同じ様に行くが、その際の *fundamental lemma* となる *lemma* 4 に相当する *lemma* の証明を次に述べる。

lemma. $\mu_n \rightarrow \mu$, $t_n \rightarrow t_0$, $t_0 \in R-N$ とすると

$$d(t_n, \mu_n) \rightarrow d(t_0, \mu)$$

こゝに、$d(t, \mu)$ は各 t に対し $\int_\Omega W(X, d)\, p(X, t)\, d\mu$ を最小にする d を対応させる写像を表はすものとする。之は $R-N$ に於ては、一意的に定まる。N に於ては、適当に定める。

さて、証明は次の通りである。

今

$$\int_\Omega W[x, d(\text{オ}_n, \mu_n)]\, p(x, \text{オ}_0)\, d\mu \to \int_\Omega W[x, d(\text{オ}_0, \mu)]\, p(x, \text{オ}_0)\, d\mu$$

とする。*) 先づ、Dの compact なることより

$$d(\text{オ}_{n'}, \mu_{n'}) \to d^*$$

なる $\{n'\}$, d^* が存在する。そうすると、

$$W[x, d(\text{オ}_{n'}, \mu_{n'})] \to W(x, d^*) \ \text{uniformly in } x$$

従って、

$$\int_\Omega W(x, d^*)\, p(x, \text{オ}_0)\, d\mu = \int_\Omega W[x, d(\text{オ}_0, \mu)]\, p(x, \text{オ}_0)\, d\mu$$

そこで、各 オ_0 に上記の様な d^* を対応させる写像を $d^*(\text{オ}_0)$ と記すと、假定4より、R−Nに於て

$$d^*(\text{オ}_0) = d(\text{オ}_0, \mu)$$

となる。故に之よりR−Nに於て

$$d(\text{オ}_n, \mu_n) \to d(\text{オ}_0, \mu)$$

---

*) 前に書いた講義録に於ては、この所が印刷の間違がある。後を読めばわかることであるが。

なることが分る。

さて、

$$(4) \quad \int_\Omega \varpi[x, d(t_n, \mu_n)] p(x, t_0) d\mu \nrightarrow \int_\Omega \varpi[x, d(t_0, \mu)] p(x, t_0) d\mu .$$

とする。そうするとこの 左辺 ≧ 右辺 なる故

$$(1) \quad \lim_{n' \to \infty} \left[\int_\Omega \varpi[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})] p(x, t_0) d\mu - \int_\Omega \varpi[x, d(t_0, \mu)] p(x, t_0) d\mu \right.$$

$$= \delta > 0$$

なる $\{d(t_n, \mu_n)\}$ の部分列 $\{d(t_{n'}, \mu_{n'})\}$ が存在する。

又、$p(x, t)$ は連続なる故、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、各 x に関して、その近傍 U_x，及び整数 n_0 が定まり、

$$x' \in U_x, \quad n > n_0 \rightarrow |p(x', t_n) - p(x', t_0)| < \varepsilon$$

となる。こゝで Ω は Compact なる故、この様な近傍の有限箇で覆はれる。それに対する有限箇の n_0 の最大なるものを n_1 とすれば、凡ての　に対し、

$$n > n_1 \rightarrow |p(x, t_n) - p(x, t_0)| < 2\varepsilon .$$

そうすると、$n > n_1$ なる n に対し

$$\left| \int_\Omega \varpi[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})] p(x, t_{n'}) d\mu - \int_\Omega \varpi[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})] p(\ , t_0) d\mu \right|$$

$$\leqq \int_\Omega |\varpi[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})]| \cdot |p(x, t_{n'}) - p(x, t_0)| d\mu \leqq 2\varepsilon$$

ε は任意にとれる故 (1) とこれより

(2) $\lim_{n'\to\infty}\left[\int_\Omega \overline{W}[\ \ , d(t_{n'}, \mu_{n'})]\, P(\ \ , t_{n'})\, d\mu - \int_\Omega \overline{W}[\ \ d(t_0, \mu)]\, P(X, t_0)\, d\mu\right]$

$= \delta > 0$

さて $d(t_n, \mu_n) \to d(t_0, \mu)$ 又 $P(\ \ , t_n) \to P(\ \ , t_0)$

uniformly in x なる故

$$\overline{W}[X, d(t_0, \mu)]\, P(X, t_n) \longrightarrow \overline{W}[X, d(t_0, \mu)]\, P(X, t_0)$$

uniformly in X

従って

(3) $\int_\Omega \overline{W}[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})]\, P(x, t_{n'})\, d\mu_{n'} - \int_\Omega \overline{W}[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})]\, P(x, t_{n'})\, d\mu$

$\longrightarrow 0,$

(4) $\int_\Omega \overline{W}[x, d(t_{n'}; \mu)]\, P(x, t_{n'})\, d\mu_{n'} - \int_\Omega \overline{W}[x, d(t_0; \mu)]\, P(x, t_{n'})\, d\mu$

$\longrightarrow 0,$

(5) $\int_\Omega \overline{W}[x, d(t_0, \mu)]\, P(x, t_{n'})\, d\mu - \int_\Omega \overline{W}[x, d(t_0, \mu)]\, P(x, t_0)\, d\mu$

$\longrightarrow 0,$

そうすると (2), (3), (4), (5) より

$$\int_\Omega \overline{W}[x, d(t_{n'}, \mu_{n'})]\, P(x, t_{n'})\, d\mu_{n'} - \int_\Omega \overline{W}[x, d(t_0, \mu)]\, P(x, t_{n'})\, d\mu_{n'}$$

$> 0.$

之は、$\alpha(t_{n'},\mu_{n'})$ の定義に反する。故に(H)は成立しない。
従って、

$$\alpha(t_n,\mu_n)\to\alpha(t_0,\mu),\quad t_0\in R-N$$

が成立する。之で証明された。

尚、この *lemma* の系として、次のことが成立する。

系　$W[x,\alpha(t,\mu)]$ は一つの μ に対し $\Omega x(R-N)$ の上で連続である。従って、$\mathfrak{X}$ に関し *measurable* である。

証明

$$n\to\infty,\quad t_n\to t_0\qquad t_0\in R-N$$

とすると、

$$W[x,\alpha(t_n,\mu)]\to W[x,\alpha(t_0,\mu)]\ \textit{uniformly in}\ x\quad \text{より}$$

任意の $\varepsilon>0$ に対し $n>n_0$ とすると

$$|W[x,\alpha(t_n,\mu)]-W[x,\alpha(t_0,\mu)]|<\varepsilon\quad \textit{for all}\ x$$

なる n_0 がある。故に、特に $x=x_n$ とすると、$n>n_0$ なる n に対し、

$$|W[x_n,\alpha(t_n,\mu)]-W[x_n,\alpha(t_0,\mu)]|<\varepsilon$$

次に $W(x;\alpha)$ は α を固定したとき x に関し連続なる故、$n>n_1$ なる n に対し、

$$|W[x_n,\alpha(t_0,\mu)]-W[x_0,\alpha(t_0,\mu)]|<\varepsilon$$

となる n_1 が存在する。故に、$n > n_0, n_1$ とすると、

$$\left| W[x_n, \alpha(t_n, \mu)] - W[x_0, \alpha(t_0, \mu)] \right| < 2\varepsilon.$$

となる。之は、$W[x, \alpha(t, \mu)]$ が、μ を固定したとき、$\Omega \times (R-N)$ に於て連続なることを示す。　（証終り）

尚、前に、假定2を満足する様な分布函数の集合の例を述べたが、凡てのモメントが存在し、此等によつて定まる様な分布函数を考へれば、このやうなものの集合は矢張りヒルベルト空間内の部分集合と考へられる。

以上

（昭和24年3月28日記）