

## ②③ 四捨五入ノ誤差ニツイテ

### 二 見 陸

四捨五入ノ誤差ノ研究ニハ四捨五入シテ得ラレタ數ハ、ソノ値ノ兩側ニ  $\frac{1}{2}$  タケ楕ガツター様分布確率變數ト考ヘテ議論ヲ進メルノデア  
ルガ實際ニ計算シテキルト、ソノヤウナ假定ニ疑問ノ生スルコトガア  
ル。ココデハソノーツノ場合トシテニツノ數ヲ掛算シテ答ノ何桁目カ  
ヲ四捨五入スルコトヲ考ヘテ見ル。

例ヘバ5桁ノ數ト3桁ノ數ヲ掛算シテ答ノ下3桁ヲ四捨五入スルト  
キソノ下3桁ノ數ハ000カラ999迄一樣ニ分布シテキルデアラウ  
カ。簡單ナ場合ヲ考ヘレバ、ソノ様ト一樣性ハ直々ニ否定サレル。即  
チ任意ニ選ンタ1桁ノ數ヲニツ掛ケタ時ノ答ノ下1桁ノ數字ハ可能ナ  
場合100個ノウチ、第一表ノヤウナ個數ヲ表ハレル。

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
個數	27	4	12	4	12	9	12	4	12	4	100

第 一 表

從ツテニ數ヲ掛ケテ答ノ下1桁ヲ四捨五入スルトキニハ、得ラレタ  
數カ切上ゲテ得ラレタ確率ハ  $(9+12+4+12+4) \div 100 = \frac{41}{100}$  .  
切捨テテ得ラレタ確率ハ  $(4+12+4+12) \div 100 = \frac{32}{100}$  . 丁度ソノ  
マ、デアル確率ハ  $\frac{27}{100}$  デアル。左右対称ヲサイシ且第一表カ示ス様  
ニ明カニ一樣ヲナイ。

シカシ桁ノ多イニ數ヲ掛ケテ、下カラ多クノ桁ヲ四捨五入スルト、  
 大体左右対称、一様ニナルコトガ期待サレルノデアツテ、本稿デハソ  
 ノ証明ヲ目的トスル。ソノ前ニツノ例

$$\begin{array}{r}
 89012 \\
 \times \quad 567 \\
 \hline
 623084 \\
 534072 \\
 445060 \\
 \hline
 50469804
 \end{array}$$

カ示ス様ニ5桁ニ3桁ヲ掛ケルト言ツテモ、四捨五入スル下3桁ニ影  
 響スルノハ結局相方ノ下3桁同志デアルコトニ注意スル。従ツテ何桁  
 ノ掛算デアツテモ、四捨五入ノタメニ下カラトル桁数ダケノ桁数ヲ相  
 方デ下カラトツテ考ヘレバヨイ。ココデハ先ツ3桁ノ數AトBヲ掛ケ  
 ル場合ヲ例ニ考ヘテ見ヨウ。AモBモ000カラ999迄変リ、ソ  
 レニ應ジテA・Bハ1,000,000個ノ値ヲトルガ問題トナルノハン  
 ノ下3桁ダケデアツテ、ソレガドノ様ニ000カラ999迄配分サレ  
 ルカラ見ル。今後下3桁ダケガ問題デアルノデ、例ヘバ上ノ例ノ場合  
 ハ  $A = 0/2$ ,  $B = 567$ ,  $A \cdot B = 804$  ナル場合トスル。  
 ソシテ次ノ様ナ分析ヲ行フ。

(i) Aノ下1桁ガ1・3・7・9ノ何レカデアレバ、Bノ000カ  
 ラ999迄ニ対シA・Bハ000カラ999迄ヲ1回ツツトル

☺ ヲノ様ナAニ対シBヲ000カラ順次掛ケテ行ク時m回目  
 トn回目 ( $m < n$ ) デ同ジA・Bガ出レバ  $m-1$  回目ト、  
 $m-1$  回目モ同ジデナケレバナラズ、コレヲ繰返セバ  $\geq n-(m-1)$   
 回目ハ000デナケレバナラナイ。

即チ、 $A = B = n-m$  ( $2001$ ) ヲ掛ケルト  $A \cdot B = 000$   
 トナル。シカシ、Aノ下1桁ガ1・3・7・9ノ何レカ  
 ナラバ、コレニBヲ掛ケテ000トナルノハ  $B = 000$ 、

時ノミデアル。

(ii) Aノ下1桁が2又ハ6デアレバ、Bノ000カラ999迄ニ対シA・Bハスベテノ偶数ヲ2回ツツトル。

☺ B=000トB=500ニ対シA・B=000トナリ、ソレ以外ノBニ対シテハA・B≠000デアルカラ(i)ノ時ト同ジ様ニ考ヘルトA・Bノトル偶数值ハ丁度2回ツツ同ジモノカアル。而シテBノ000カラ499迄ニ対シA・Bハスベテ異ナツテキルベキデアルカラ、ソノトル値ハスベテノ偶数值ニ互ル。

(iii) Aノ下1桁が4又ハ8ナラバBノ000カラ999迄ニ対シ、A・Bハ下2桁が4ノ倍数ナルスベテノ数ヲ4回ツツトル。

☺ B=000, 250, 500, 750ニ対シA・B=000トナリ、ソノ他ノBニ対シテハA・B≠000デアルカラ(ii)ノ時ト同ジ様ニ考ヘレバヨイ。

(iv) Aノ下1桁が5ナラバBノ000カラ999迄ニ対シA・Bハ5ノ倍数ナルスベテノ数ヲ5回ツツトル

☺ B=000, 200, 400, 600, 800ニ対シ、A・B=000トナリ、ソレ以外ノBニ対シテハA・B≠000デアルカラ

(v) Aノ下1桁が0デ2桁目が0テナケレバBノ000カラ999迄ニ対シA・Bハ10ノ倍数ナルスベテノ数ヲ10回ツツトル

☺ B=000, 100, 200, ----- 900ニ対シ、A・B=000トナリ、ソレ以外ノBニ対シテハA・B≠000デアルカラ

(vi) Aノ下2桁が00デ初メノ数字が0テナケレバ、Bノ000カラ999迄ニ対シA・Bハ100ノ倍数ナルスベテノ数ヲ100回ツツトル

☺ B=000, 010, 020, ----- 990ニ対シ、A・B=000トナリ、ソレ以外ノBニ対シテハA・B≠000デアルカラ

(vii) Aが000ならば、すべてノB=対シ、 $A \cdot B = 000$

☺ 当然

ユノ分析カラ A・B ノ分布ヲ求メルニ、総数 1,000,000 個ノウチ

(1) 下1桁ガ 1・3・7・9 ノ何レカナルモノハ何レモ 400 個アル

☺ A、下1桁ガ 1・3・7・9 ノ何レカナルモノハ 000 カラ 999 迄ニ総数 400 個アルカラ、(i)ニヨリ A・B ノドノ数モ少クトモ 400 個アルガ、A・B 下1桁ガ 1・3・7・9 トナルノハ A、下1桁ガ 1・3・7・9 ナル時ニ限ルカラ

(2) 偶数ア下2桁ガ 4ノ倍数ニナラズ、且ツ下1桁ガ 0ニナラナイモノハ、何レモ 800 個アル。

☺ カカル数ハ (i)ニヨリ少クトモ 400 個アルノデアルガ、ソノ他ニヨリ  $200 \times 2 = 400$  個アリ、ソノ他ニハゴウナル場合ガナイカラ

(3) 下2桁ガ 4ノ倍数ア下1桁ガ 0ニナラズモノハ何レモ 1600 個アル

☺ (i)ニヨリ 400 個、(ii)ニヨリ 400 個、(iii)ニヨリ  $200 \times 4 = 800$  個アツテ、ソノ他ニハゴウナル場合ガナイカラ

(4) 下1桁ガ 5ニナルモノハ何レモ 900 個アル

☺ (i)ニヨリ 400 個、(iv)ニヨリ  $100 \times 5 = 500$  個アツテ、ソノ他ニハゴウナル場合ガナイカラ

(5) 下2桁ガ 10, 30, 50, 70, 90, トナルモノハ何レモ 2200 個アル

☺ (i)ニヨリ 400 個、(ii)ニヨリ 400 個、(iv)ニヨリ 500 個、(v)ニヨリ  $90 \times 10 = 900$  個アツテ、ソノ他ニハゴウナル場合ガナイカラ

(6) 下2桁ガ 20, 40, 60, 80 トナルモノハ何レモ 3000 個アル

⊙ (i) = ヨリ 400 個, (ii) = ヨリ 400 個, (iii) = ヨリ 800 個, (iv) = ヨリ 500 個, (v) = ヨリ 900 個アツテ, ソノ他 = ハコウナル場合ガナイカラ、

(7) 下 2 桁ガ 00 デ 000 以外ノモノハ何レモ 3900 個アル

⊙ (6) ト同様ニシテ (i) カラ (v)迄ニヨリ 3000 個アリ  
更ニ (vi) = ヨリ  $9 \times 100 = 900$  個アツテ, ソノ他ニ  
ハコウナル場合ガナイカラ

(8) 000 ナルモノハ 4900 個アル

⊙ (i) カラ (vi)迄ニヨリ 3900 個アリ, 更ニ (vii) = ヨリ 1000 個アルカラ、  
スノ (i) カラ (8)迄ニヨツテ, A ト B ノ組合セニヨル A・B ノ総数ガ盡サレテキルコトヲ檢  
算シテ見ヨウ。(1)ニ該当スル A・B 即チ下 1 桁ガ、 $37 \cdot 9$ ノ何レカナル A・B ハ 000 カラ 999 迄 = 400  
個アリ, (2)ニ該当スルモノハ 200 個 (000 カラ 099 迄 = 20 個アルカラ), (3)ニ該当スルモノハ  
200 個 (000 カラ 099 迄 = 20 個アルカラ), (4)ニ該当スルモノハ 100 個, (5), (6), (7), (8)  
ニ該当スルモノハ 夫々 50 個, 40 個, 9 個, 1 個デア  
ルカラ、(i) カラ (8)迄ニ夫々ノ該当数ヲ掛ケテ加ヘル  
ト

$$(400 \times 400) + (800 \times 200) + (1600 \times 200) \\ + (900 \times 100) + (2200 \times 50) + (3000 \times 40) \\ + (3900 \times 9) + (4900 \times 1) = 1,000,000$$

テ、コレニヨツテ A・B ガ完全ニ配分サレテキルコトガワ  
カッタ。(i) カラ (8)迄ヲ見テ A・B ノ分布ヲスケッチシ  
テミルト

(9) (i) カラ (8)迄ノ型カ 000 カラ 999 迄入レ交ツ  
テ余布シ、アル所ニ、アル種ノ型ガ、カタマツテ存  
在スルトイフコトガナイ。シカモ 000 ヲ除ケト、  
100 番目ニハ必ず同ジ型ガ現ハレルカラ、全体ノ

$\frac{1}{10}$  の長さの区間 (例へば 263 から 362 迄)  
が占める確率ハ

$$\text{ソノ区間が } 000 \text{ を含マヌ時} : \frac{999}{10000}$$

$$000 \text{ を含ム時 (例へば } 985 \text{ から } 084 \text{ 迄)} : \frac{1009}{10000}$$

テ共ニ殆ド  $\frac{1}{10}$  ニ等シイ

(b) コノ分布ハ 000 (又ハ 500) を中心ニ左右対  
稱デアアル。例へば 002 ト 998 トハ同シ個数ト  
ナル

(c) 000 トナル確率が最も高イガ、ソレモ  $\frac{49}{10000}$   
テ極メテ小サイ。

(d) 500 ハ切上ゲルカラ、切上ル確率ハ切捨テル確  
率ヨリ  $\frac{39}{10000}$  ダケ多イガコノ確率モ極メテ  
小サイ

トイフコトガ判リ、大体、一様分布確率変数ト見テヨイコト  
ガ承認サレル。

以上ニヨリ下 3 桁ヲ四捨五入シテモ相当程度ノ一様性が期  
待サレルコトガワカツタノデアアルガ、3 桁ヲ更ニ 4 桁、5 桁  
ト増ヌ時ニハ更ニ強ク一様性が期待サレルノデアアル。一般ニ  
 $n$  桁ノ時ヲ考ヘルニ 3 桁ノ時ト全ク同シ分析ヲ行ツテ第二表  
ノ様ニ結果ヲ得ル。

A · B	(1) 出現個數	(2) 該当スルA · Bノ數	(3) (1) × (2)
○ 下1桁が1, 3, 7, 9, 何レカナルモノ	$4 \times 10^{n-1}$	$4 \times 10^{n-1}$	$16 \times 10^{2n-2}$
○ 偶數デ下2桁ガ4ノ倍數ニ ナラズ且下1桁ガ0デナイモノ	$8 \times 10^{n-1}$	$2 \times 10^{n-1}$	$16 \times 10^{2n-2}$
○ 下2桁ガ4ノ倍數デ下1桁ガ0デナイモノ	$16 \times 10^{n-1}$	$2 \times 10^{n-1}$	$32 \times 10^{2n-2}$
○ 下1桁ガ5ニナルモノ	$9 \times 10^{n-1}$	$10^{n-1}$	$9 \times 10^{2n-2}$
○ 下2桁ガ10, 30, 50, 70, 90ニナルモノ	$22 \times 10^{n-1}$	$5 \times 10^{n-2}$	$11 \times 10^{2n-2}$
○ 下2桁ガ20, 40, 60, 80ニナルモノ	$30 \times 10^{n-1}$	$4 \times 10^{n-2}$	$12 \times 10^{2n-2}$
○ 下2桁ガ00デ3桁 目ガ0ナラザルモノ	$(30+9) \times 10^{n-1}$	$9 \times 10^{n-3}$	$9 \times 30 \times 10^{2n-4} + 9 \times 10^{2n-4}$
○ 下3桁ガ000デ4 桁目ガ0ナラザルモノ	$(30+9 \times 2) \times 10^{n-1}$	$9 \times 10^{n-4}$	$9 \times 30 \times 10^{2n-5} + 2 \times 9 \times 10^{2n-5}$
.....	.....	.....	.....
○ 下n-1桁ガすべて0デ n桁目ガ0ナラザルモノ	$(30+9 \times \overline{n-2}) \times 10^{n-1}$	9	$9 \times 30 \times 10^{n-1} + (n-2) \times 9^2 \times 10^{n-1}$
○ n桁スベテガ0ナルモノ	$(30+9 \times \overline{n-2} + 10) \times 10^{n-1}$	1	$(40+9 \times \overline{n-2}) \times 10^{n-1}$
計		$10^n$	$10^{2n}$

第 二 表

後ツテ3桁ノ時ニ述ベタスケツチ (a) (b) (c) (d) ハ何時モ成立シ、且ツ、 $n$ 桁ノ場合ハ

$$\left\{ \begin{array}{l}
 00 \dots 0 (n+1) \text{ヲ含マヌ } \frac{1}{10} \text{ノ長サノ区間ガ占メル確率:} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{10^n - 1}{10^{n+1}} \\
 00 \dots 0 (n+1) \text{ヲ含ム} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{10^n + 9}{10^{n+1}} \\
 00 \dots 0 (n+1) \text{トナル確率 (最高確率)} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{40 + 9(n-2)}{10^{n+1}} \\
 50 \dots 0 (n-1) \text{トナル確率 (切上げ確率ト切捨確率ノ差)} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{30 + 9(n-2)}{10^{n+1}}
 \end{array} \right.$$

トナリ、 $n \rightarrow \infty$ ナル時、始メノニツハ  $\frac{1}{10}$ ニ、終リノニツハ 0ニ收斂スル。コレデ切捨五入スル桁数ヲ増ス時ニ様分布トミナシテヨイコトガワカル。

最後ニ、ニツノ注意事項ヲ加ヘテオク。先ツ上ノ議論デハ Aト Bノトル数ハ一樣ナ確率デ現ハレルト仮定シタ。例ヘバ3桁ノ場合ハ 000カラ999迄ノドノ数モ  $\frac{1}{1000}$ ノ確率デ現ハレルトシタ。

後ツテサウ考ヘラレナイ時ニハ上ノ議論ヲ当テハメルコトハ出来ナイ。例ヘバ  $A_i$ ガ5桁  $B_i$ ガ3桁デ  $A_i \cdot B_i$ ヲツクル時ニ  $A_i$ ガ 88800ト89100ノ間ニアルコトガ豫メ判ツテキル時ニハ上ノ議論ハ使ヘナイ。シカシ  $A$ ヲ800カラ899迄トシ、 $B$ ヲ000カラ999迄トシテモ、コノ  $A$ ヲモトニシテ (i)カラ (vii)迄ノヤウナ分解ヲ行フト、ヤハリ、 $AB$ ガ000カラ999迄大体一樣ニ分布スルコトガ証明サレル。後ツテ実ハ今ノ例ノ様ナ時ニモ  $A \cdot B$ ヲ3桁デキツテヨイノデアアル。一般ニ randomト思ハレル桁ノ多イ方ニ後ツテ答ノ桁ヲ切ツテヨイ。



次ニ、今迄ハ A モ B モ確定数ト考ヘタノデアルガ、コレヲ自身ガ四捨五入シテ得ラレタ数(即チ一様分布確率変数)デアル時ニハ、上ノ誤差ノ外ニ、一様分布確率変数ノ掛算ニヨル誤差ヲ考慮シナケレバナラナイ。〔コレニツイテハ、ニ見隆、四捨五入ノ誤差ニツイテ(統計数理研究所・講究録第一巻、第十四号)ヲ参照〕

シカシ誤差ノ範囲ハ  $(A - \frac{1}{2})(B - \frac{1}{2})$  カラ  $(A + \frac{1}{2})(B + \frac{1}{2})$  迄デアルカラ十分析数ヲ多クシテ  $AB$  ニ比ベテ  $\frac{A+B}{2}$  ガ極メテ小サイ様ニスレバ、コノ誤差ハ  $A \cdot B$  ヲツツテ下カラ四捨五入スル際ノ析数ヨリズツト小サイ析ノ所ヲ止ル。

後ツテコノ誤差ハ *negligible* デ、上ノ議論ノママ四捨五入テ得ラレタ数ハ大体一様分布確率変数トミナサレル。コノコトハ重要ナコトデアリ、四捨五入シタ数同士ヲ掛算スル際モ、掛算ノ結果ノ長イ数ヲ下カラノ析数ヲ適當ニ多クシテ四捨五入スルト、ソレハ改メテ、一様分布確率変数ト見テヨイコトヲ示ス。