㊳ 指数分布とPoisson分布との関係

鍋谷　清治

$X_1, X_2, \cdots\cdots$ が指数分布

(1)　$dF(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx$　. $(x \geqq 0)$

に従ふ互に独立な確率変数であるとき，次のやうにして負ならざる整数値をとる確率変数 N を定義する。

正数 x を固定して

(2) $\begin{cases} X_1 > x & \text{ならば}\quad N = 0 \\ X_1 \leqq x,\ X_1 + X_2 \leqq x, \cdots\cdots X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqq x & \\ \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} > x & \text{ならば}\quad N = n \end{cases}$

つまり X_1 から $X_1 + X_2$，$X_1 + X_2 + X_3, \cdots\cdots$ を順次作つて行つて初めて x を越える所の番号が $N+1$ になるやうにする。このとき，Nが x/μ を平均値とするPoisson分布に従ふことは既に知られてゐる。これを証明する為に $N \geqq n$（但し $n \geqq 1$）となる確率を計算すると，それは $X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n \leqq x$ なることゝ同じであるから，

(3)　$P_r(N \geqq n) = P_r(X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n \leqq x)$

$$= \underset{\substack{x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0, \cdots x_n \geqq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq x}}{\int\int\cdots\cdots\int} \frac{1}{\mu^n} e^{-\frac{1}{\mu}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

こゝで変数変換

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = \mu y_1$$
$$x_2 + \cdots\cdots + x_n = \mu y_1 y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \mu y_1 y_2 \cdots\cdots y_n$$

を行ふと，その Jacobian は

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n)} = \mu^n y_1^{n-1} y_2^{n-2} \cdots\cdots y_{n-1}$$

となつて，y に関しては $0 \leqq y_1 \leqq x/\mu,\ 0 \leqq y_2 \leqq 1, \cdots 0 \leqq y_n \leqq 1$ で積分すればよいことになる，随つて

$$P_r(N \geqq n) = \int_0^{x/\mu} e^{-y_1} y_1^{n-1} dy_1 \int_0^1 y_2^{n-2} dy_2 \cdots\cdots \int_0^1 y_{n-1} dy_{n-1} \int_0^1 dy_n$$

こゝで第二，第三，$\cdots\cdots$ の積分は夫々 $\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2} \cdots\cdots, \frac{1}{1}$ となる． 第一の積分に対しては部分積分を行ふと

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{x/\mu} e^{-y_1} y_1^{n-1} dy_1$$
$$= \frac{(\frac{x}{\mu})^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^{x/\mu} e^{-y_1} y_1^n dy_1$$
$$= \frac{(\frac{x}{\mu})^n}{n!} + P_r(N \geqq n+1)$$

故に

$$P_r(N = n) = P_r(N \geqq n) - P_r(N \geqq n+1) = e^{-\frac{x}{\mu}} \frac{(\frac{x}{\mu})^n}{n!}$$

これは丁度 $\frac{x}{\mu}$ を平均値とする Poisson分布で n なる値をとる確率になつてゐる。

以上は阪大の小川先生から聞いた証明であるが，こゝでこの逆の事

実が成立つことを確めて見た。それは次の定理である。

定　理　$X_1, X_2, \cdots\cdots$ は同一な分布函数 $F(x)$ を持つ所の，互に独立な確率変数で，そのとる値は non-negative な実数とする。若しもこゝで任意の正数 x に対して，（2）で定義された確率変数 N が必ず Poisson 分布に従ふならば $F(x)$ は（1）の形，即ち指数分布に限る。

証　明　$x>0$ を任意に固定したとき（2）で定義された確率変数 N は Poisson 分布に従ふといふ假定なのでその平均値を $f(x)$ とする。勿論 $0<f(x)<\infty$ である。このとき（3）と同様に

$$P_r(N \geqq n) = P_r(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n \leqq x)$$

が成立つ。

こゝで左辺は

$$P_r(N \geqq n) = 1 - P_r(N = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

$$= 1 - e^{-f(x)}\left(1 + \frac{f(x)}{1!} + \frac{f(x)^2}{2!} + \cdots + \frac{f(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

で右辺は $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ の分布函数になつてゐる。これを $F_n(x)$ と書けば

$$F_n(x) = 1 - e^{-f(x)}\left(1 + \frac{f(x)}{1!} + \frac{f(x)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{f(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

特に $n=1$ とすれば初めの分布函数

$$(4) \qquad F(x) = F_1(x) = 1 - e^{-f(x)}$$

となる。随つて $f(x)$ は単調増加で

$$(5) \qquad f(\infty) = \infty \qquad F_n(\infty) = 1$$

又，$n=2$ と置けば

$$F_2(x) = 1 - e^{-f(x)}\left(1+f(x)\right)$$

こゝで

（6）　$f(+0)=0$　　随って　$F_n(+0)=0$

が証明される。何となれば X_1 と X_2 は互に独立だから

$$F_2(+0)=P_r(X_1+X_2=0)=P_r(X_1=X_2=0)=P_r(X_1=0)^2=F(+0)^2$$

故に

$$1-e^{-f(+0)}(1+f(+0))=(1-e^{-f(+0)})^2$$

即ち

$$1-e^{-f(+0)}-f(+0)e^{-f(+0)}=1-2e^{-f(+0)}+e^{-2f(+0)}$$

$$e^{-f(+0)}\left(1-f(+0)-e^{-f(+0)}\right)=0$$

これが成立つのは $f(+0)=0$ のときに限るから結局（6）が得られる訳である。

次に，$t>0$ として $-t$ に対する $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ の積率母函数を計算して見る。

$$\varphi_n(-t)=\int_0^\infty e^{-tx}\,dF_n(x)$$

左辺は $\varphi_1(-t)=\varphi(-t)$ の n 冪となり，右辺に対しては，部分積分を行ふと（5），（6）に注意して

$$(7)\quad \varphi(-t)^n=\left[e^{-tx}F_n(x)\right]_0^\infty+\int_0^\infty t\,e^{-tx}F_n(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty t\,e^{-tx}\left(1-e^{-f(x)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x)^k}{k!}\right)dx$$

$$= 1 - \int_0^\infty t\, e^{-tx-f(x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x)^k}{k!}\, dx$$

こゝで u を $|u| < 1$ なる任意の複素数として（7）の両辺に，u^{n-1} を掛けて n に関して加えることにする。このとき左辺は，$0 < \varphi(-t) < 1$ なることからその和は

$$\frac{\varphi(-t)}{1-u\varphi(-t)}$$ となる。

右辺では

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f(x)^k}{k!} u^{k+l} = \frac{1}{1-u} e^{uf(x)}$$

となるから結局

$$\frac{\varphi(-t)}{1-u\varphi(-t)} = \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1-u} \int_0^\infty t\, e^{-tx-f(x)} e^{uf(x)} dx$$

（積分と総和の順序の変更が $0 \leqq u < 1$ のときに許されることは明らかであるが，一般の場合は u の代りに $|u|$ と置いたものが級数の majorant となつていることからわかる）

故に

$$\int_0^\infty t\, e^{-tx-f(x)} e^{uf(x)} dx = 1 - \frac{(1-u)\varphi(-t)}{1-u\varphi(-t)} = \frac{1-\varphi(-t)}{1-u\varphi(-t)}$$

随つて

$$(8) \quad \int_0^\infty \frac{t}{1-\varphi(-t)}\, e^{-tx-f(x)} e^{uf(x)} dx = \frac{1}{1-u\varphi(-t)}$$

ここで特に $u = 0$ と置くと

$$\int_0^\infty \frac{t}{1-\varphi(-t)}\, e^{-tx-f(x)} dx = 1$$

となるから，

$$g(x)\begin{cases} = \dfrac{t}{1-\varphi(-t)}\, e^{-tx-f(x)} & (x \geqq 0) \\ = 0 & (x < 0) \end{cases}$$

は或る確率変数の確率密度と考えられる。 これを Y とするとき，（8）は f（Y）の積率母函数が

$$\frac{1}{1-u\,\varphi(-t)}$$

となることを意味する。

所がこれは $\varphi(-t)$ を平均値とする指数分布

$$\frac{1}{\varphi(-t)}\, e^{-\frac{x}{\varphi(-t)}}\, dx \qquad (x \geqq 0)$$

の積率母函数であるから f（Y）はこの分布に従はなければならない。

それ故 Y がすべての正数値を動くとき f（Y）もすべての正数値をとる。 随つて $f(x)$ は x の連続函数になる。

しかも，$0 < x' < x''$ に対しては $f(x') = f(x'')$ とはならない。若しもこれが成立つとしてその共通の値を a とすれば

$$P_r\,(x' \leqq Y \leqq x'') \leqq P_r\,(f(Y) = a) = 0$$

一方

$$P_r\,(x' \leqq Y \leqq x'') = \int_{x'}^{x''} \frac{t}{1-\varphi(-t)}\, e^{-tx-f(x)}\, dx > 0$$

となつて，これは明らかに矛盾である。

依つて f（x）は x に関して狭義の単調増加連続函数となる。即ち $x \longrightarrow f(x)$ は正数値全体の位相的対應を與える。

次に E を正数値ばかりから成る Lebesgue 測度 0 の任意の Borel 集合とすると，函数 $f(x)$ による E の像 f（E）も Borel 集合になる。そして

$$0 = P_r\,(Y \in E) = P_r\,\big(f(Y) \in f(E)\big) = \int_{f(E)} \frac{1}{\varphi(-t)}\, e^{-\frac{x}{\varphi(-t)}} \cdot dx$$

所がこの右辺の被積分函数は常に正だから $f(E)$ の Lebesque 測度はやはり 0 でなければならない。

依つて $f(x)$ は x に関して絶対連続であつて，その導函数 $f'(x)$ の不定積分として與えられる。

任意の正数 x に対して

$$P_r(Y \leqq x) = P_r(f(Y) \leqq f(x))$$

となることから

$$\int_0^x \frac{t}{1-\varphi(-t)} e^{-tx-f(x)} dx = \int_0^{f(x)} \frac{1}{\varphi(-t)} e^{-\frac{x}{\varphi(-t)}} dx$$

両辺を x に関して微分すると，殆んど到る処で

$$\frac{t}{1-\varphi(-t)} e^{-tx-f(x)} = \frac{1}{\varphi(-t)} e^{-\frac{f(x)}{\varphi(-t)}} f'(x)$$

隨つて

$$t e^{-tx} = \frac{1-\varphi(-t)}{\varphi(-t)} e^{-\frac{1-\varphi(-t)}{\varphi(-t)} f(x)} f'(x)$$

両辺を 0 から x まで積分して

$$\int_0^x t e^{-tx} dx = \int_0^x \frac{1-\varphi(-t)}{\varphi(-t)} e^{-\frac{1-\varphi(-t)}{\varphi(-t)} f(x)} f'(x) dx$$

$$1 - e^{-tx} = 1 - e^{-\frac{1-\varphi(-t)}{\varphi(-t)} f(x)}$$

故に

$$f(x) = \frac{t\varphi(-t)}{1-\varphi(-t)} x$$

こゝで $\dfrac{t\varphi(-t)}{1-\varphi(-t)}$ は x に無関係なのでこれを $\dfrac{1}{\mu}$ と置けば

$$f(x) = \frac{x}{\mu}$$

隨つて（4）から

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$dF(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx \qquad (x \geqq 0)$$

これは，F（x）が指数分布の分布函数なることを示している。