㉚ 分布函数に関する若干の考察

高　野　金　作

§0. 序　　分布函数の *convolution* の連続性（定理2）は，普通，特性函数を用ひて証明されてゐるが，それを用ひなくても証明出来ることが，*P. Lévy : Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 1937 §25 に述べてある。

Lévy の記述は完全とは云ひ難いので，それを補足して紹介してみたいと思ふ。

又，上記の本には，二つの分布函数の距離が小さいならば，それらの最大濃度函数の距離も小さいことが，よく利用されてゐるが，それに定量的表現（定理3）を與へておくことは意味のある事である。

以上の二つが，この小文の主な目的であるが，これらの外に，分布函数の逆函数に関する説明と若干の事項を附加へておいた。

§1.　$F(x)$ を分布函数とする。即ち，全区間 $-\infty < x < \infty$ に於て，定義された單調非減少函数で，

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

が成立するものとする。

然る時は，点集合

$$\{(x, y)\ ;\ F(x-0) \leqq y \leqq F(x+0)\}$$

は連続曲線を形成する。

これを分布函数 $F(x)$ のぐらふといふ。

一つの連続曲線が或る単調非減少函数のぐらふであるために必要且つ充分な條件の一つは，その曲線上の任意の点を新しい原点として，座標軸を平行に移動させた時，その曲線が新座標軸に関して，第1及び第3象限（境界を含む）内にあることである。

この條件は両座標軸に関し対称であるから，分布函数 $y=F(x)$ のぐらふをぐらふとする，開区間 $0<y<1$ で定義された単調非減少函数 $x=f(y)$ が存在する。

これをもとの分布函数 $F(x)$ の逆函数といふ。

解析的に云へば，$0<y<1$ なる y が與へられた時，

$$F(x-0)\leqq y\leqq F(x+0)$$

を x について解いたもの（一義にきまらぬ時は任意の一つ）を，$x=f(y)$ とおくわけである。

分布函数 $F(x)$ の逆函数を $f(y)$ とすれば，その定義から次のことが成立つ。

系 1.　$x_1<f(y)<x_2$ ならば $F(x_1)\leqq y\leqq F(x_2)$

証明　$F(x_1)\leqq F(f(y)-0)\leqq y\leqq F(f(y)+0)\leqq F(x_2)$

系 2.　次の二つの條件は等値である.

(1)　$F(x-0)\leqq y\leqq F(x+0)$

(2)　$f(y-0)\leqq x\leqq f(y+0)$.

証明　(1), (2) 共に，点 (x, y) が $F(x)$ 従つて $f(y)$ のぐらふの上にある條件だからである.

系 3.　$F(f(y+0)-0)\leqq y\leqq F(f(y-0)+0)$

証明　系2により $x=f(y\pm 0)$ は共に (1) の解であるから.

§ 2. *Lemma* 1.　二つの分布函数 $F(x)$, $G(x)$ の *Lévy* の距離を $\rho(F, G)$ で表し，又 $F(x)$, $G(x)$ の逆函数を夫々 $f(y)$ $g(y)$ とおけば，次の三つの條件は等値である。

(3)　$\rho(F, G) \leqq \delta$

(4)　$F\left(x-\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leqq G(x) \leqq F\left(x+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad -\infty<x<\infty$

(5)　$f\left(y-\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leqq g(y) \leqq f\left(y+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad 0<y<1$

但し，$y \leqq 0$ に対し，$f(y)=-\infty$；$y \geqq 1$ に対し

$f(y)=+\infty$ とおく。

証　明．　(3)，(4)，(5) は何れも，分布函数 $G(x)$ の，ぐらふが，分布函数 $F(x)$ のぐらふを直線 $x+y=0$ の方向に δ だけ平行移動して得る二つの曲線の間にあることを意味するから，それらの等値性は明かである。

定　理　1.　分布函数 $F_n(x)$，$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$，の逆函数を $f_n(y)$ とおけば，次の諸条件は等値である.

(6)　$\lim_{n\to\infty} \rho(F_n, F_0) = 0$

(7)　$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$，（$F_0(x)$ のすべての連続点で），

(8)　$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f_0(y)$，（$f_0(y)$ のすべての連続点で）

(9)　$F_0(x-0) \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leqq F_0(x+0)$,

$-\infty<x<\infty$,

(10)　$f_0(y-0) \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(y) \leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(y) \leqq f_0(y+0)$

$0<y<1$.

証　明　i)　(6) → (9) → (7)　$\rho(F_n, F_0)=\delta_n$ とおけば *Lemma* 1 から

$$F_0\left(x-\frac{\delta_n}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\delta_n}{\sqrt{2}} \leqq F_n(x) \leqq F_0\left(x+\frac{\delta_n}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta_n}{\sqrt{2}}$$

$n \to \infty$ ならしめると，仮定により $\delta_n \to 0$．

$$F_0(x-0) \leqq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqq F_0(x+0)$$

従つて，$F_0(x)$ の連続点では $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$

ii) (7) ⟶ (6)，ε を与へられた正数とし，

$$F_0(-M) < \varepsilon, \quad 1-F_0(M) < \varepsilon$$

なる $F_0(x)$ の連続点 $\pm M$ をとれば，充分大なる N_1 に対し

$$F_n(-M) < \varepsilon, \quad 1-F_n(M) < \varepsilon, \quad n > N_1$$

が成立つ．従つて $|x| \geqq M$，$n > N_1$ ならば

$$|F_n(x) - F_0(x)| < \varepsilon$$

となり，従つて

$$F_0(x-\varepsilon)-\varepsilon \leqq F_0(x)-\varepsilon < F_n(x) < F_0(x)+\varepsilon \leqq F_0(x+\varepsilon)+\varepsilon$$

が成立つ。

次に区間 $(-M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ を有限（例へば m）個の区間に分け，各区間の長さを $\frac{\varepsilon}{2}$ より小ならしめ，各区間から $F_0(x)$ の連続点を一つ宛とり，それを

$$x_1, \ x_2, \cdots\cdots, \ x_m,$$

とする。

N_2 を充分大きくとれば，

$$|F_n(x_i) - F_0(x_i)| \leqq \varepsilon, \quad n > N_2, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

$-M < x < M$ なる x に対し $x-\varepsilon < x_i < x < x_j < x+\varepsilon$ なる x_i と x_j とが存在し，

$$F_0(x-\varepsilon)-\varepsilon \leqq F_0(x_i)-\varepsilon \leqq F_n(x_i) \leqq F_n(x) \leqq F_n(x_j)$$
$$\leqq F_0(x_j)+\varepsilon \leqq F_0(x+\varepsilon)+\varepsilon$$

従つて， $n > N = max(N_1, N_2)$ ならば，すべてのxに対し，

$$F_0(x-\varepsilon)-\varepsilon \leqq F_n(x) \leqq F_0(x+\varepsilon)+\varepsilon$$

が成立つ。

故に *Lemma 1* から

$$(11) \qquad \rho(F_0, F_n) \leqq \sqrt{2}\,\varepsilon, \qquad n > N$$

即ち，任意の正数εに対し，Nを充分大きくとれば，(11) が成立つ。

之で (7) $\longrightarrow$ (6) は証明された。

以上により (6)，(7)，(9) の等値なことが分つた。

同様にして，(6)，(8)，(10) の等値なことが分る。 依って定理は証明された。

分布函数 $F(x)$ の逆函数を $f(y)$とすれば， $f(\frac{1}{2})$ は $F(x)$の中位数に外ならず， §1 系2から

$$f\left(\tfrac{1}{2}-0\right), \quad f\left(\tfrac{1}{2}+0\right)$$

は夫々最小，最大の中位数であるから，上記の (7) から (10) が導かれる事から，次の系を得る。

系 1. $F_n(x)$ を分布函数とする，$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$，$F_0(x)$ のすべての連続点に於て，$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ が成立つ時，$F_n(x)$ の任意の中位数を a_n，$(n=1,2,\cdots\cdots)$とすれば，数列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ の任意の集積点は $F_0(x)$ の中位数になる。

従つて，$F_0(x)$の中位数 a_0 が一意にきまるならば $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ が成立つ。 (P. *Lévy, loc. cit.* § 43, *Théorème* 43,2)

この系の *Lévy* の本に書いてある証明を紹介すれば，次の通りである。

問題を一般にして (7) $\longrightarrow$ (10) を証明する。

$0 < y_0 < 1$ を固定しておく． 数列 $\{f_n(y_0)\}$ は有界である。何となれば，例へば，上に有界でないとすれば，任意の正数Gに対し，$f_{n_i}(y_0) > G$ なる無限系列 $\{n_i\}$ が存在し，$y_0 \geqq F_{n_i}(G)$ となり，Gを F_0 の連続点にとつておけば， $y_0 \geqq F_0(G)$，Gはいくらでも大きくとれるから， $y_0 = 1$となり，矛盾を生ずる。

そこで数列 $\{f_n(y_0)\}$の集積点の一つを x_0 とする。

任意の正数 ε に対して，

$$x_0-\varepsilon < f_{n_i}(y_0) < x_0+\varepsilon$$

なる部分系列 $\{n_i\}$ が存在する。

これから §1 系 1 により

$$F_{n_i}(x_0-\varepsilon) \leqq y_0 \leqq F_{n_i}(x_0+\varepsilon)$$

を得る。

$x_0-\varepsilon$ と $x_0+\varepsilon$ とを $F_0(x)$ の連続点にとつておいて，$n_i \longrightarrow \infty$ ならしめると，

$$F_0(x_0-\varepsilon) \leqq y_0 \leqq F_0(x_0+\varepsilon)$$

$\varepsilon > 0$ は，いくらでも小さくとれるから，

$$F_0(x_0-0) \leqq y_0 \leqq F_0(x_0+0)$$

従つて §1 系 2 から

$$f_0(y_0-0) \leqq x_0 \leqq f_0(y_0+0) \tag{3}$$

定理 1 の條件が成立する時に，$\rho\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n = F_0$ 又は $F_n \to F_0$ と書くことにする。

定理 2．$\rho\text{-}\lim F_n = F_0$，$\rho\text{-}\lim G_n = G_0$ ならば，$\rho\text{-}\lim F_n * G_n = F_0 * G_0$

証明　分布函数 $F(x)$ の逆函数 $f(y)$ は區間 $0<y<1$ に一様な確率を入れた確率空間 Ω で定義された確率變数と考へることが出來て，その分布函数は $F(x)$ である。

それで，$F_n \to F_0$，$G_n \to G_0$ ならば，

確率空間 $\Omega_1 = \{\omega_1 ; 0 < \omega_1 < 1\}$，

$\Omega_2 = \{\omega_2 ; 0 < \omega_2 < 1\}$

で夫々定義された確率變数列 $\{X_n\}$，$\{Y_n\}$ で次の條件を成立させる

ものが存在する。

i)　$P_r(\lim X_n = X_0) = 1$,　$P_r.(\lim Y_n = Y_0) = 1$,

ii)　X_n, Y_n は夫々分布函数 F_n, G_n に従ふ。

X_n, Y_n を Ω_1 と Ω_2 との直積確率空間 $\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$ で表現しておけば，即ち $X_n(\omega_1, \omega_2) = X_n(\omega_1)$, $Y_n(\omega_1, \omega_2) = Y_n(\omega_2)$ とおけば，X_n と Y_n とは同一確率空間で定義された独立な確率変数となり，$P(\lim(X_n + Y_n) = X_0 + Y_0) = 1$ が成立し，$X_n + Y_n$ は分布函数 $F_n * G_n$ に従ふ。　故に $F_n * G_n \to F_0 * G_0$ が成立つ。

§ 3.　分布函数の最大濃度函数 $Q(\ell)$ は元来，$0 \leqq \ell < \infty$ で定義されてゐるのであるが，$\ell < 0$ に対し $Q(\ell) = 0$ とおけば（任意の分布函数の最大濃度函数 $Q(\ell)$ について，以後これを假定する），$Q(\ell)$ は形の上からは分布函数に外ならない。　従つてこの二つの分布函数 $F(x)$, $G(x)$ の最大濃度函数 $Q_F(\ell)$, $Q_G(\ell)$ 間の Lévy の距離 $\rho(Q_F, Q_G)$ を定義することが出来る。

Lemma 2.　二つの分布函数 $F(x)$, $G(x)$ の最大濃度函数を $Q_F(\ell)$, $Q_G(\ell)$ とし，收幅度函数を $L_F(\gamma)$, $L_G(\gamma)$ とおけば次の三つの條件は等値である。

(12)　$$\rho(Q_F, Q_G) \leqq 2\delta$$

(13)　$$Q_F(\ell - \sqrt{2}\delta) - \sqrt{2}\delta \leqq Q_G(\ell) \leqq Q_F(\ell + \sqrt{2}\delta) + \sqrt{2}\delta, \quad -\infty < \ell < \infty$$

(14)　$$L_F(\gamma - \sqrt{2}\delta) - \sqrt{2}\delta \leqq L_G(\gamma) \leqq L_F(\gamma + \sqrt{2}\delta) + \sqrt{2}\delta \quad 0 < \gamma < 1$$

但し，$\gamma \leqq 0$ に対し，$L_F(\gamma) = 0$，$\gamma > 1$ に対し $L_F(\gamma) = +\infty$ とおく。

定理 3.　二つの分布函数 $F(x)$, $G(x)$ の最大濃度函数を，$Q_F(\ell)$, $Q_G(\ell)$ で表せば，

$$\rho(Q_F, Q_G) \leqq 2\rho(F, G)$$

証　明．　$\rho(F, G)=\delta$ とおけば，*Lemma* 1により，すべての x に対し，

$$F\left(x-\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leqq G(x) \leqq F\left(x+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

が成立する。任意の $0 \leqq l < \infty$ に対し，

$$Q_F(l+\sqrt{2}\delta)=\underset{-\infty<x<+\infty}{\mathrm{L.U.B.}}\left[F\left(x+l+\frac{\delta}{\sqrt{2}}+0\right)-F\left(x-\frac{\delta}{\sqrt{2}}-0\right)\right]$$

$$\geqq \underset{x}{\mathrm{L.U.B}}\left[G(x+l+0)-G(x-0)-\sqrt{2}\delta\right]$$

$$=Q_G(l)-\sqrt{2}\delta$$

依つて，すべての $l(-\infty<l<+\infty)$ に対し，

$$Q_F(l-\sqrt{2}\delta)-\sqrt{2}\delta \leqq Q_G(l) \leqq Q_F(l+\sqrt{2}\delta)+\sqrt{2}\delta.$$

Lemma 2 により

$$\rho(Q_F, Q_G) \leqq 2\delta.$$

§4　*Lemma*. 3.　分布函数 $F(x)$ の逆函数を $f(y)$，収幅度函数を $L(\gamma)$ とおけば次式が成立つ．

$$L(\gamma)=\min_{0\leqq S\leqq 1-\gamma}\left\{f(S+\gamma-0)-f(S-0)\right\}.$$

証　明．　分布函数 $F(x)$ によつて定められる確率測度について考へる．$0 \leqq \gamma \leqq 1$ なる γ を一つきめておく。

$0 \leqq S \leqq 1-\gamma$ なる S をとれば，閉區間 $[f(S+0), f(S+\gamma-0)]$ の確率測度は

$$F[f(S+\gamma-0)+0]-F[f(S+0)-0] \geqq (S+\gamma)-S=\gamma \quad (§1系3)$$

次に閉區間 $[a, b]$ の確率測度が γ 以上であるとすれば

$$F(b+0)-F(a-0) \geqq \gamma$$

依つて，$F(a-0)=S$ とおけば，$F(b+0) \geqq S+\gamma$

又

$$b \geqq f[F(b+0)-0] \geqq f(S+\gamma-0)$$

$$a \leqq f[F(a-0)+0] = f(S+0)$$

即ち，γ 以上の確率測度をもつ閉區間は，Sを適当にとれば，

$[f(S+0),\ f(S+\gamma-0)]$ なる形の閉區間を含む．

L(γ)は γ 以上の確率測度をもつ閉区間の長さの下限であるから，

$$L(\gamma) = \underset{0 \leqq S \leqq 1-\gamma}{\mathrm{G.L.B.}} \left\{ f(S+\gamma-0) - f(S+0) \right\}$$

然るに，S の函数 $f(S+\gamma-0)-f(S+0)$ は，下に半連続であるから，閉區间 $0 \leqq S \leqq 1-\gamma$ に於て実際最小値をとる。

故に，

$$L(\gamma) = \min_{0 \leqq S \leqq 1-\gamma} \left\{ f(S+\gamma-0) - f(S+0) \right\}$$

(1950. 1. 7)