① MARKOFFの定理について

所員　小川潤次郎

F.N.David 及び J.Neyman のMARKOFFの定理に関する論文[1]は前に本誌Vol.3.NO.9(1948)[2]に紹介した。その証明を正規回帰論の方法[3]で次の如く簡単化することが出来たので報告する。この方法によれば増山氏の拡張された場合[4]も一度に証明されたことになる。

MARKOFFの定理

(a) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は独立

(b) x_i の平均値は $s \leqq n$ 箇の未知定数 $p_1, \cdots p_s$ の一次形式

$$\mathcal{E}(x_i) = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{is}p_s, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(c) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

の階数は s

(d) x_i の分散 σ_i^2 は

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{P_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

なるときは、

(α) $S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_{i1}p_1-a_{i2}p_2------a_{is}p_s)^2P_i$

を最小ならしめる p_i の値を p_i^0 とすれば，b_i を既知として

$$\theta=b_1p_1+b_2p_2+------+b_sp_s$$

の線形最良不偏推定値は

$$F=b_1p_1^0+b_2p_2^0+------+b_2p_s^0 \quad \text{で又}$$

(β) F の分散の不偏推定値は

$$\mu_F^2=\frac{S_0}{n-s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{P_i}$$

但し $S_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_{i1}p_1^0-------a_{is}p_s^0)^2P_i$,

$$F=b_1p_1^0+------+b_sp_s^0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$$

である。

$$y_i=\sqrt{P_i}(x_i-a_{i1}p_1-----a_{is}p_s),\ i=1,2,----,n$$

とおくと

$$\mathcal{E}(y_i)=0,\ \mathcal{E}(y_i^2)=\sigma^2, \quad i=1,2,-----,n$$

又 $y_i^0=\sqrt{P_i}(x_i-a_{i1}p_1^0--------a_{is}p_s^0),\ i=1,2,---n$

として，n 次元ユークリッド空間 R_n の直交座標の原点から引かれた，$s+3$ 箇のベクトル

$$\mathfrak{x}=\begin{Bmatrix}\sqrt{P_1}x_1\\ \vdots\\ \sqrt{P_n}x_n\end{Bmatrix},\ \mathfrak{a}_i=\begin{Bmatrix}\sqrt{P_1}a_{1i}\\ \vdots\\ \sqrt{P_n}a_{ni}\end{Bmatrix},\ i=1,2,---,s,\ \mathfrak{y}=\begin{Bmatrix}\sqrt{P_1}y_1\\ \vdots\\ \sqrt{P_n}y_n\end{Bmatrix},\ \mathfrak{y}^0=\begin{Bmatrix}\sqrt{P_1}y_1^0\\ \vdots\\ \sqrt{P_n}y_n^0\end{Bmatrix}$$

を考へれば

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}^0=-------=\mathfrak{a}_s\mathfrak{y}^0=0$$

である。$\mathfrak{a}_1----\mathfrak{a}_s$ は (c) より一次独立だから s 次元部分空間 R_s を張り $\mathfrak{y}^0$ はこれに垂直な空間 R_{n-s} 内にある。

適當に座標軸を回転して第 $n-s+1$ 番目以下の軸が R_s 内にあるやうにする。

$$z = \begin{Bmatrix} Z \\ \vdots \\ Z_n \end{Bmatrix} \qquad \text{として}$$

$$y = Cz$$

$$y^0 = C \begin{Bmatrix} Z \\ \vdots \\ Z_{n-s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

$$a_1(p_1^0 - p_1) + \cdots + a_s(p_s^0 - p_s) = C \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Z_{n-s+1} \\ \vdots \\ Z_n \end{Bmatrix}$$

となるような直交行列 C がある。

$$z = C'y \qquad \text{から}$$

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\, y_j$$

よって $\mathcal{E}(Z_i) = 0$, $\mathcal{E}(Z_i Z_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$, $i,j = 1, 2, \cdots, n$

(1)から $S_0 = (y_0, y_0) = Z_1^2 + \cdots + Z_{n-s}^2$

であるから $\mathcal{E}(S_0) = (n-s)\sigma^2$ (3)

行列 $K = (k_{\mu\nu})$, $k_{\mu\nu} = (a_\mu a_\nu)$, $\mu, \nu = 1, 2, \cdots, s$

は(c)によって non-singular (6) であるから

$K^{-1} = (k^{\nu\mu})$ とすれば(2)より方程式

$$K \begin{Bmatrix} p_1^0 - p_1 \\ \vdots \\ p_s^0 - p_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=n-s+1}^{n} \sqrt{p_i}\, a_{i1} c_{i\mu} Z_\mu \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=n-s+1}^{n} \sqrt{p_i}\, a_{is} c_{i\mu} Z_\mu \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

を得るから，これを解くと

$$p_\tau^0 - p_\tau = \sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{i} k^{\tau\nu}\sqrt{p_i}\, a_{i\nu} c_{i\mu} z_\mu \tag{5}$$

これから

$$\mathcal{E}(p_\tau^0 - p_\tau) = 0,\ \mathcal{E}(p_\tau^0 - p_\tau)(p_{\tau'}^0 - p_{\tau'}) = \sigma^2 \sum_{\nu\nu'}\sum_{ii'}\sum_{\mu} k^{\tau\nu}k^{\tau'\nu'}\sqrt{p_i p_{i'}}\, a_{i\nu} a_{i'\nu'} c_{i\mu} c_{i'\mu}$$

これから

$$\sigma_F^2 = \sigma^2 \sum_{\tau\tau'}\sum_{\nu\nu'}\sum_{ii'}\sum_{\mu} b_\tau b_{\tau'} k^{\tau\nu}k^{\tau'\nu'}\sqrt{p_i p_{i'}}\, a_{i\nu} a_{i'\nu'} c_{i\mu} c_{i'\mu} \tag{6}$$

又

$$F = \sum_{\tau} b_\tau p_\tau^0 = \sum_{j} x_j \sum_{\tau}\sum_{\nu}\sum_{i}\sum_{\mu} b_\tau k^{\tau\nu}\sqrt{p_i p_j}\, c_{i\mu} c_{j\mu}$$

であるから

$$\lambda_j = \sum_{\tau}\sum_{\nu}\sum_{i}\sum_{\mu} b_\tau k^{\tau\nu}\sqrt{p_i p_j}\, c_{i\mu} c_{j\mu}$$

故に

$$\sum_{j}\frac{\lambda_j^2}{p_j} = \sum_{\tau\tau'}\sum_{\nu\nu'}\sum_{ii'}\sum_{\mu} b_\tau b_{\tau'} k^{\tau\nu}k^{\tau'\nu'}\sqrt{p_i p_{i'}}\, a_{i\nu} a_{i'\nu'} c_{i\mu} c_{i'\mu} \tag{7}$$

これですべて証明出来たわけである。

増山氏の拡張を云かには初めの座標系を斜交にとつておけばよいのである。

参　考　文　献

(1) F.N. David and J. Neyman ; Extensun of the MARKOFF theuvom on least squares, stat. Res. Mem, Vol. I. p.105

(2) 小川潤次郎・最小自乗法に関する Mark off の定理を続つて 統數研講究録 Vol.3 No9 (1947)

(3) 小川潤次郎・正規回帰法論及びその應用　統數研講究録 Vol.3. No 21−22 (1948)

(4) 増山元三郎・MARKOBの定理について 統数研講究録

Vol. 4. No. 11 (1949)

(6) S.S. Wilks; Mathomatical Statistics, 1943, Chap. VIII 参照

論 文 紹 介 II

G. Rash; a Functinal Equatim For Wishart's Distribution

The Annals of Math, Stat. Vol 19 NO. 2 - jume 1948.

紹介者昨年来正規回帰論を取扱った方法で Wishart 分布を簡単に導出しようと努力して居たが未だにうまく行ってゐない。非常に簡単な方法が G. Rash によって用ひられてゐるので紹介する。

$$\mathscr{Y} = (x_1, \cdots\cdots, x_k) \qquad (1)$$

は平均 0, 積率行列

$$\Phi = (\varphi_{ij}) \qquad (2)$$

の正規分布をするものとする。即ち

$$p(\mathscr{Y}) = \frac{\sqrt{\Delta(\Phi)}}{(\sqrt{2\pi})^k} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathscr{Y}\Phi\mathscr{Y}^*} \qquad (3)$$

こゝで $\mathscr{Y}^*$ は $\mathscr{Y}$ を縦にしたベクトル, Φ は poitive-definite な対稱行列である。

さて、n 箇の標本 $\mathscr{Y}_1, \cdots\cdots, \mathscr{Y}_n$ が独立であるならば、その同時分布は

$$p(\eta_1,\cdots\cdots,\eta_n)=\left(\frac{\sqrt{\Delta(\Phi)}}{(\sqrt{2\pi})^k}\right)^n, e^{-\frac{1}{2}\sum_{\nu}^{n}\eta_\nu\Phi\eta_\nu^*} \tag{4}$$

$$m_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu i}x_{\nu j}$$

として

$$M=(m_{ij})=\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu^*\eta_\nu \tag{5}$$

は対稱で positive－definite だから，平方してMになるような行列 $M^{\frac{1}{2}}$ があって，$M^{\frac{1}{2}}$ も対稱である。

$$\eta_\nu=M^{\frac{1}{2}}\check{u}_\nu \tag{6}$$

とおくと

$$\sum_{\nu}\check{u}_\nu^*\check{u}_\nu=E \tag{6'}$$

今

$$U=\begin{pmatrix}\check{u}_1\\ \\ \\ \check{u}_n\end{pmatrix} \tag{7}$$

とすれば，行列Uの nk 箇の元素の内独立なものは $\left(n-\frac{k+1}{2}\right)k$ 箇である。これらを（U）で表わすことにする。

次に

$$A\cdot\cdot B\equiv(a_{ij})\cdot\cdot(b_{ij})=\sum_{i}\sum_{j}a_{ij}b_{ij} \tag{8}$$

なる積を定義すれば，勿論 $A\cdot\cdot B=B\cdot\cdot A$ であって

$$A\cdot\cdot(BCD)=C\cdot\cdot(B^*AD^*) \tag{9}$$

である。

$$\eta_\nu\Phi\eta_\nu^*=\sum_{ij}\varphi_{ij}x_{\nu i}x_{\nu j}=\Phi\cdot\cdot(\eta_\nu^*\eta_\nu)$$

であるから

$$\sum_{\nu} \xi_\nu \Phi \xi_\nu^* = \Phi \cdot\cdot M \tag{10}$$

$$p\{M,(U)\} = \left(\frac{\sqrt{\Delta(\Phi)}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi\cdot\cdot M} \left|\frac{\partial(\xi_1, \cdots \xi_n)}{\partial(M,(U))}\right| \tag{11}$$

これを（U）で積分して

$$p(M) = (\sqrt{\Delta(\Phi)})^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi\cdot\cdot M} \cdot \varphi(M) \tag{12}$$

$\varphi(M)$ は Φ と functinally independent である

任意の non-singular な A で

$$\xi_\nu = \xi_\nu' A \tag{13}$$

とすれば，ξ' の積率行列 Φ' は

$$\Phi' = A \Phi A^* \tag{14}$$

$$M = A^* M' A \tag{15}$$

よって（12）より

$$p(M') = (\sqrt{\Delta(\Phi')})^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi'\cdot\cdot M'} \varphi(M') \tag{16}$$

（12）から（16）へは（15）で移れるから

$$\frac{\partial(M)}{\partial(M')} = 4(A) \tag{17}$$

とおくと

$$p(M') = \sqrt{\Delta(\Phi)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi\cdot\cdot M} \cdot \varphi(M) \cdot |4(A)| \tag{18}$$

（16）と（18）が一致すべきことは明かである。さて

$$\Delta(\Phi') = \Delta(\Phi)\,\Delta^2(A) \tag{19}$$

$$\Phi' \cdot\cdot M' = (A \Phi A^*) \cdot\cdot M' = (A^* M' A) \cdot\cdot \Phi = M \cdot\cdot \Phi \tag{20}$$

であるから

$$|\Delta(A)|^{n}\cdot\varphi(M')=\varphi(M)\cdot|\psi(A)| \qquad (21)$$

今二つの変換 A, B を次々に行つと考へれば

$$\psi(AB)=\psi(A)\cdot\psi(B) \qquad (22)$$

このときは $\psi(A)$ は $(\Delta(A))^{e}$ の形なることが分つてゐる。(1)

Aが対角線形のときは $\psi(A)$ の定義から

$$\psi(A)=(\Delta(A))^{k+1} \qquad (23)$$

故に一般に

$$\psi(A)=(\Delta(A))^{k+1}$$

特に $A=M^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$M'=E$$

であるから (21) より

$$\varphi(M)=(\Delta(M)^{\frac{1}{2}})^{n-k-1}\cdot\varphi(1) \qquad (24)$$

$\varphi(1)$ は定数である。よつて (12) より

$$p(M)=g_k(n)\cdot(\Delta(\Phi))^{n/2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\Phi\cdot M}\cdot(\Delta(M))^{\frac{n-k-1}{2}} \qquad (25)$$

これから定数 $g_k(n)=\varphi(1)$ を定めればよい。

参　考　文　献

(1) Hidegoro Nakano, Über eine stetige Matrix funktun, Proc. Imp. Academy. Vol.VIII. NO.6. p217 (1932) (小川潤次郎紹介)