㊷ 標本抽出法に関する一考察

研究生　池田豊治

M 個の抽出単位があるとき，これより m 個の抽出単位を，與えられた或る確率にて抽出する方法に就いて考察する。

M 個の抽出単位を $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_M$ とする。
此の M 個より m 個を抽出するとすれば，抽出の場合の数は，M個に於ける m 個の組合せの数 $\binom{M}{m}$ である。

m 個の各組を $A_{j1}, A_{j2}, \cdots\cdots, A_{jm}$ $\left[j = 1, 2, \cdots\cdots, \binom{M}{m} \right]$ と記す。

但し，j は組の目印として適当に $1, 2, \cdots\cdots, \binom{M}{m}$ なる番号を定めたものであり，組内に於ける m 個の區別を $1, 2, \cdots\cdots, m$ なる数字にて表したものである。

$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_M$ に夫々一定の数値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_M$ を対應させるならば，$A_{j1}, A_{j2}, \cdots\cdots, A_{jm}$ には，$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots\cdots, \alpha_{jm}$ が対応する。

標本調査にあたつて，適当な $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_M$ を決定して，

$A_{j1}, A_{j2}, \cdots\cdots, A_{jm}$ が抽出される確率が，

$$\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3} + \cdots\cdots + \alpha_{jm}$$

に比例するようにして，一組の m 個を抽出すれば，効率の良い母数の推定が出來ることが知られている。(1)

尚，此の様な確率比例抽出の一方法は既に知られてはいるが，抽出

の操作が少しく繁雑である。[2]

次に述べる方法を用いるならば，操作が簡単になる。

第一段： $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_M$ から，A_i $(i=1,2,\cdots\cdots,M)$ が抽出される確率が α_i に比例するようにして，一個の抽出単位を抽出する。

第二段： 抽出した一個を除外した残りの（M－1）個の抽出単位より，通常用いられる任意抽出の方法で $(m-1)$ 個の抽出単位を抽出する。

即ち，最初に於ける一個の抽出に確率比例抽出法を用い，残りの（M－1）個からの（m－1）個の抽出に任意抽出法（無作爲抽出）を用いて，合計 m 個を抽出する。

此の方法に依るならば，m 個の一組 $A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jm}$ が抽出される確率は，$\alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots\cdots+\alpha_{jm}$ に比例し

$$\frac{\alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots\cdots+\alpha_{jm}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_M}\cdot\frac{1}{\binom{M-1}{m-1}}$$

となる。

何故なれば，第一段で A_{j1} が抽出され，第二段で $A_{j2}, \cdots A_{jm}$ が抽出される確率は，明らかに

$$\frac{\alpha_{j1}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_M}\cdot\frac{1}{\binom{M-1}{m-1}}$$

第一段で A_{j2} が抽出され，第二段で $A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, \cdots A_{jm}$ が抽出される確率は，

$$\frac{\alpha_{j2}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_M}\cdot\frac{1}{\binom{M-1}{m-1}}$$

同様にして，第一段で $A_{j3}, A_{j4}, \cdots\cdots, A_{jm}$ が夫々抽出され

れる場合の確率が求められ，これらの m 種类の場合は排反であるから，第一段で A_{j1}，------ A_{jm} の何れが抽出されるかを問題にせずに，第一段と第二段を通じて，とにかく A_{j1}，A_{j2}，------ A_{jm} が抽出される確率は，上記の確率の総和となるからである。

此の抽出方法を一般化すると次となる。

第一段： M個より，任意抽出法にて k 個（$k \leqq m-1$）抽出する。

第二段： 残りの（$M-k$）個より，A_i の抽出される確率が次となるようにして，一個抽出する。

$$A_i \text{ の抽出確率} \backsim \frac{\left(\begin{array}{l}\text{第一段で抽出された } k \text{ 個} \\ \text{に対応する } \alpha \text{ の総和}\end{array}\right)}{M-k}+\alpha_i$$

第三段： 残りの（$M-k-1$）個より，任意抽出法にて（$m-k-1$）個抽出する。

この三段階にて，合計 m 個抽出する。

先に述べた抽出法は $k=0$ の場合であつて，第一段が略され，第二段の抽出操作が簡単になつたものであり，抽出操作としては最も簡単である。

吾々の得た確率比例抽出法の適用は，次に述べることにより，標本調査にあたつて有用であると思われる。

A_1，A_2，----- A_M の各々における吾々が対象にしている目印の数量（例えば，各々における所得総額）を夫々，

$$S_1,\quad S_2,\ \cdots\cdots\cdots,\quad S_M$$

とする時，A_1，A_2，------，A_M に夫々 α_1，α_2，-----，α_M なる既知なる数値を対応させて，上記の抽出法で m 個を抽出し，抽出した

$$A_{j1},\quad A_{j2},\ \cdots\cdots,\ A_{jm}$$

に対応する S_i の値を S_{j1}，S_{j2}，------，S_{jm}

α_i の値を $\alpha_{j1},\ \alpha_{j2},\ \cdots\cdots,\ \alpha_{jm}$

とすれば

$$\frac{S_{j1}+S_{j2}+\cdots\cdots+S_{jm}}{\alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots\cdots+\alpha_{jm}} \quad は$$

$$\frac{S_1+S_2+\cdots\cdots+S_M}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_M}$$

の不偏推定量となる。

尚，

$$\frac{S_{j1}+S_{j2}+\cdots\cdots+S_{jm}}{\alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots\cdots+\alpha_{jm}} \quad の分散は，近似的に$$

$$\left(\frac{S}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\sigma_{S_j}^2}{S^2}+\frac{\sigma_{\alpha_j}^2}{\alpha^2}-2\rho_{S_j\alpha_j}\frac{\sigma_{S_j}\sigma_{\alpha_j}}{S\alpha}\right)$$

となる，但し

$$\left\{\begin{array}{l} S_1+S_2+\cdots\cdots+S_M = S \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_M = \alpha \\ S_{j1}+S_{j2}+\cdots\cdots+S_{jm} = S_j \\ \alpha_{j1}+\alpha_{j2}+\cdots\cdots+\alpha_{jm} = \alpha_j \\ \quad \sigma_{S_j}^2 = S_j \text{ の分散} \\ \quad \sigma_{\alpha_j}^2 = \alpha_j \text{ の分散} \qquad \text{とする。} \\ \rho_{S_j\alpha_j} = S_j \text{ と } \alpha_j \text{ との相関係数} \end{array}\right.$$

或は，

$$分散 \leqq \left(\frac{M-m}{m-1}\right)\left(\frac{\alpha_i\ max.}{\alpha_j\ min.}\right)\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(\frac{S_i}{\alpha_i}-\frac{S}{\alpha}\right)^2\frac{\alpha_i}{\alpha}\right\}$$

但し，

$\alpha_i\ max.$ は α_i （$i=1, 2, \cdots\cdots, M$）の中の最大値．

$\alpha_j\ max.$ は $\alpha_{j_1}+\cdots\cdots+\alpha_{j_m}=\alpha_j$ の中の最小値．

（i と j とは区別して使用した．）

等号は，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_M$ の時である。

註（1）　講究録　第五巻第一号。水野坦氏「Sampling System 論について」

註（2）　日本数学会　昭和２３年度秋季例会における水野坦氏の発表。「大きさに比例する確率をもってする抽出法について」

以　上

（２５．４．３０）