⑩ 検定力函数と假説の分離度

東京女高師　工藤弘吉

先の小論“検定力函数について”に於て対立假説に対する検定力函数について説いたが，この検定力函数を用ひて假説間にある種の距離を導入することが出來ないか？

この問題に関して，一つの解答を得たので，こゝに此を紹介しようと思ふ。

そして，この距離がいかなる意味をもつかについても簡単に述べたい。

§.1. 距離の導入

Ω は或集合，Ω の部分集合の Borel 属を $\mathcal{B}(\ni \Omega)$，$\mathcal{B}$ の上で定義された完全加法集合函数 $P(E)$（但 $P(\Omega)=1$ $P(E) \geqq 0$）のうちで次の條件（C.C.）を満すものだけを考へる。

（C.C）$\left\{\begin{array}{l}\text{任意に與へられた } E\ (E \in \mathcal{B}) \text{ に対して } P(E)=\beta \\ (0<\beta<1) \text{ ならば，} 0 \leqq \alpha < \beta' \text{ なるすべての } \alpha \\ \text{に対して } E_0 \in \mathcal{B} \text{ があり } P(E_0)=\alpha \text{ である。}\end{array}\right.$

この（C.C.）を満す完全加法函数の或集合を $\mathfrak{H}$ とする．

$\mathfrak{H}$ の要素を H で表はし假説と呼ぶことにする。

$\mathfrak{H}$ の二つの要素 H_1，H_2 に対して H_1 を帰無假説，H_2 をそれに対立する假説として検定力函数 $\beta(\alpha, H_1, H_2)$ を作る。

そのとき，

1) $$\delta(H_1, H_2) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} (1 - \alpha - \beta(\alpha; H_1, H_2))$$

を H_1, H_2 の (size 1) の分離度 と云ふ。

［定　理］ $\delta(H_1, H_2)$ は距離の三條件を滿す。

i) $d(H_1, H_2) \geqq 0$, $d(H_1, H_2) = 0$ ならば H_1 と H_2 は equivalent である。

ii) $d(H_1, H_2) = d(H_2, H_1)$

iii) $d(H_1, H_2) + d(H_2, H_3) \geqq d(H_1, H_3)$

（証　明）

i) は明らかである。ii) は先の小論の定理Ⅴから明らか

iii) を証明するには次の関係に注意する

H_1, H_2, に対応する完全加法集合函数 P_1, P_2 とし

2) $$P_2(E) = P_2(E \frown S_2) + \int_E f_2(\omega)\, dP_1(\omega), \quad P_1(S_2) = 0, \quad E \in \mathcal{B}$$

とし　$Q_1 = [\omega \mid f_2(\omega) < 1]$

3) $$\delta(H_1, H_2) = \int_{Q_1} (1 - f_2(\omega))\, dP_1(\omega).$$

或は

4) $$\delta(H_1, H_2) = \sup_{E \in \mathcal{B}} |P_1(E) - P_2(E)|$$

4) なる関係から iii) は明らかである。何となれば H_3 に対応する完全加法函数を $P_3(E)$ とすると

$$|P_1(E) - P_3(E)| \leqq |P_1(E) - P_2(E)| + |P_3(E) - P_2(E)|$$

より　$\delta(H_1, H_3) \leqq \delta(H_1, H_2) + \delta(H_3, H_2)$

である

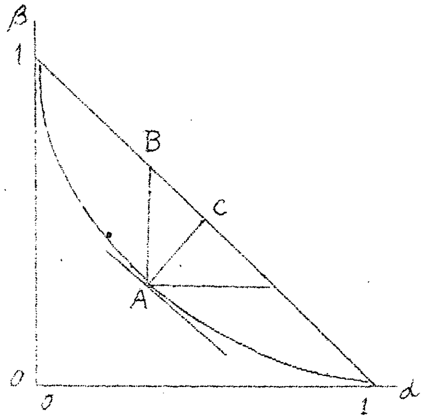
以上の証明，特に 4) なる関係から $\mathfrak{H}$ は $\delta(H_1; H_2)$ をその

距離にとるとき Banach space (A)（吉田先生著：線型作用素 P. 74）の単位球殻の部分集合であることがわかる。

§ 2　分離度と検定力曲線

上に見た様に分離度 $\delta(H_1, H_2)$ は $\mathfrak{h}$ の metric と見れば Banach space (A) の部分集合となるが，その検定力曲線との関係は如何といふことを問題にしてみよう：

対立假設 H_1，H_2 の検定力曲線の各点より横軸に垂直に直線を立てるときこの直線の $\alpha+\beta=1$ なる直線との交はりまでの長さの最大なるものが H_1 と H_2 との分離度なのであって従ってこの分離度は零から 1 までの値をとり得る。



又，この最大なるα軸に垂直なる線分の一つを AB とする（A を検定力曲線上の点，B を $\alpha+\beta=1$ なる直線上の点）とき，A よりα軸に 45° の角度をなす線分 AC（C は $\alpha+\beta=1$ の上にあり）はこの検定力曲線上の点から $\alpha+\beta=1$ に下した垂線のうちで最大なものである。従ってこのことから $\delta(H_1, H_2)$ が H_1，H_2 の検定に於て $\alpha+\beta(\alpha; H_1, H_2)$ の最小値を示してゐる。

§ 3. 分離度の Size

今迄 Ω から sample を一つとって検定する場合の分離度

について論じて来たが，こゝで n 個の sample によってなされる検定の場合は如何になるか。

$(\Omega^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, P^{(n)})$ によって Ω の n 個の直積空間においてその Borel family を $\mathcal{B}$ の直積にとり，又 P の直積 $P^{(n)}$ をその完全加法函数とする measure space を表はせば H_1 に対応する P_1 H_2 に対応する P_2 によって $(\Omega^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ で $P_1^{(n)}$ と $P_2^{(n)}$ で検定力函数 $\beta^{(n)}(\alpha, H_1, H_2)$ を作り之から 1）と同様に

$$5)\quad \delta^{(n)}(H_1, H_2) = \max_{0 \leqq \alpha \leqq 1} \left(1 - \alpha - \beta^{(n)}(\alpha; H_1, H_2)\right)$$

を作り，之を size n の分離度と云ふ。

この場合先の小論における定理 VII より

$\delta(H_1, H_2) \neq 0$ ならば，$\lim\limits_{n \to \infty} \delta^{(n)}(H_1, H_2) = 1$

となる。

しかし必ずしも $\delta(H_1, H_2) > 0$ であっても

$$\delta^{(n)}(H_1, H_2) < \delta^{(n+1)}(H_1, H_2) \qquad (n \geqq 1)$$

とは云へない（その反例は作れる）が

$$\delta^{(n)}(H_1, H_2) \leqq \delta^{(n+1)}(H_1, H_2)$$

なることは明らかであらう。

§ 4 実例

1°) mean のみを異にする二つの normal distribution の分離度，

$$H_1 : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$H_2 : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}}$$

の場合は，先の小論の §6（6.3）より $\alpha+\beta$ の最小値は

$$\alpha+\beta = 1-2\int_0^{\frac{t_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad t_0 = \frac{m_1-m_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

であるから $$\delta^{(n)}(H_1, H_2) = 1-2\int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\lambda = \frac{m_1-m_2}{\sigma}$$

である。

2°) variance のみを異にする normal distribution の分離度

$$H_1 : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$H_2 : \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$$

の場合は前出の §6（6.4）より

$$\alpha+\beta = 1-\int_{\frac{u^2}{\sigma_2^2}}^{\frac{u^2}{\sigma_1^2}} F_n(\chi^2)\, d\chi^2,$$

こゝで $u^2 = \dfrac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\left\{ n \log\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} + \log k \right\}$ で k の変化につれて u^2 が変化する。

$$F_n(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

k を適当に選んで $\alpha+\beta$ を最小にするとき丁度これが分離度となる。

（以　上）