⑬ 単位円内有界正則函数の零点と角微係数に就いて〔続〕

鍋島一郎

① 講究録，第三巻，第十三・十四号に於て，角微係数の新らしい評價をあたへ，それによつて次の定理を得た。

$f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則で $|f(Z)|<1$ とし，$Z=1$ に於ける $f(Z)$ の角微係数を D とすると，D が有限ならば，$Z=1$ に於ける内接円内には高々有限個の零点が存在する。これにより，$Z=1$ に於ける内接円には $f(Z)$ の零点を含まないものが存在するわけである。

こゝでは，この逆の問題，即ち $f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則，$|f(Z)|<1$ とし，$Z=1$ に於ける内接円で $f(Z)$ の零点を含まないものが存在すれば，$f(Z)$ の $Z=1$ に於ける角微係数は有限になるか，それとも，いかなる order で ∞ になるかという問題を考えて見る。

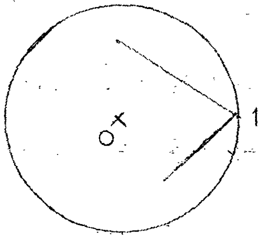
② 先づ，補助定理を述べる。

定理1　$f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則，$|f(Z)|<1$，$f(Z)\neq 0$，$\lim_{Z\to 1} f(Z)=1$ とすると

$$f'(Z)=O\left(\frac{1}{(1-Z)^2}\right)(Z\to 1)$$

となる。 但し，$Z \to 1$ は Stolz 領域内で近づくものとする。

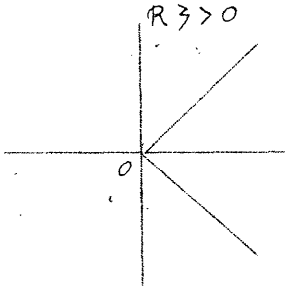
[証] $|Z|<1$



$$F(Z) = -\log f(Z)$$

とおくと，

$$\Re F(Z) = -\Re \log f(Z) = -\log|f(Z)| \geqq 0$$



$\zeta = \dfrac{1+Z}{1-Z}$ により $|Z|<1$ を $\Re \zeta > 0$ に寫像し

$G(\zeta) = F(Z(\zeta))$ とおくと，

$G(\zeta)$ は $\Re \zeta > 0$ で正則，且つ $\Re G(\zeta) \geqq 0$ 故に Caratheodory の定理により

$$\lim G'(\zeta) = C \quad in \quad |\arg \zeta| < \frac{\pi}{2} - \delta \quad (\delta > 0)$$

$$0 \leqq C < \infty$$

即ち $\quad 0 \leqq -\lim\limits_{Z \to 1} \dfrac{f'(Z)}{f(Z)} \cdot \dfrac{(1-Z)^2}{Z} = C < \infty$

$\lim\limits_{Z \to 1} f(Z) = 1$ 故 $\quad -\infty < \lim\limits_{Z \to 1} f'(Z)(1-Z)^2 \leqq 0$

然るに $\lim\limits_{Z \to 1} f'(Z) = D, \quad 0 < D \leqq \infty$ であるから

$$\lim_{Z \to 1} f'(Z)(1-Z)^2 = 0$$

となる。故に $\quad f'(Z) = o\left(\dfrac{1}{(1-Z)^2}\right) \; (Z \to 1)$ となる

(証終)

これから求むる次の定理を得る。

定理 2. $f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則, $|f(Z)|<1$

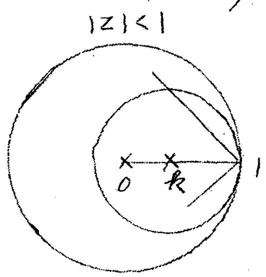
$\lim_{Z\to 1} f(Z)=1$ とし $Z=1$ に於ける内接円で $f(Z)$ の零点を含まないものがあれば, $Z=1$ に於ける $f(Z)$ の角微係数を D とすると

$$D = \left(\frac{1}{(1-Z)^2} \right) \qquad (Z\to 1)$$

である。

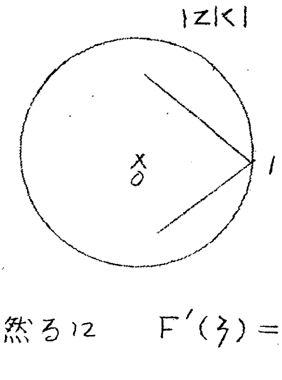
[証] かゝる内接円の中心を $Z=k$ とすると

$$\zeta = \frac{Z-k}{1-k}$$



により，その内接円は $|\zeta|<1$ に移り，$Z=1$ は $\zeta=1$ に移り，又，Stolz 領域は Stolz 領域に移る。

$$F(\zeta) = f(Z(\zeta))$$



とおくと，$F(\zeta)$ は $|\zeta|<1$ で正則 $|F(\zeta)|<1$, $F(1)=1$ $F(\zeta)\neq 0$ 故 定理 1 により

$$F'(\zeta) = o\left(\frac{1}{(1-\zeta)^2}\right) \quad (\zeta\to 1)$$

然るに $F'(\zeta)=f'(Z)(1-k)$ $\quad \dfrac{1}{(1-\zeta)^2} = \dfrac{(1-k)^2}{(1-Z)^2}$

故に,
$$f'(Z) = o\left(\frac{1}{(1-Z)^2}\right) \qquad (Z\to 1)$$

となる。　即ち

$$D = O\left(\frac{1}{(1-Z)^2}\right) \qquad (Z \to 1)$$

証終

［注意］　この定理によれば，角微係数 D は ∞ になっても $\dfrac{1}{(1-Z)^2}$ より低い order で ∞ になる。

依つて，　次の定理を得る。

定理 3.　$f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則で，$|f(Z)|<1$，$f(1)=1$ の時，$Z=1$ に於ける角微係数が $\dfrac{1}{(1-Z)^2}$ 以上の order で ∞ になれば，$Z=1$ に於ける如何なる内接円内にも $f(Z)$ の零点が無数に存在する。

③　定理1から定理2を得たことから，これからは定理1の条件の下に考へても一般性を失はない。

定理1を更にくわしくしらべると次の定理が得られる。

定理 4.　$f(Z)$ が $|Z|<1$ で正則で，$|f(Z)|<1$，$f(Z) \neq 0$ とすると $Z=1$ に於ける stolz 領域内で，

$$\lim_{Z\to 1} \frac{f'(Z)}{f(Z)}(1-Z)^2 = 2C \qquad (-\infty < C \leqq 0)$$

$$\text{但し，}\quad C = \lim_{\delta\to 0}\lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi \qquad (R<1)$$

［証］

$$F(Z) = -\log f(Z)$$

とおくと，$F(Z)$ は $|Z|<1$ で正則，$\mathcal{R}F(Z) = -\log|f(Z)| \geqq 0$

故に

$$A(\theta) = \lim_{R\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^\theta -\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

とおくと， $A(\theta)$ は単調増加で，$F(z)$ は次の Poisson-Stieltzes 積分で表はされる。

$$F(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,dA(\theta) + i\mathfrak{J}F(0)$$

即ち，

$$-\log f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,dA(\theta) - i\arg f(0)$$

故に

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,dA(\theta)$$

$A(\theta)$ は単調増加 故 $\alpha = A(+0) - A(-0) \geq 0$

とおくと，

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2\alpha}{(1-z)^2} + \left(\int_{-\pi}^{-0} + \int_{+0}^{+\pi}\right)\frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,dA(\theta) \cdots ①$$

$$J_1 = \int_{-\pi}^{-0} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,dA(\theta) = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{-0},\quad J_2 = \int_{+0}^{+\pi}\frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,dA(\theta) = \int_{+0}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{+\pi}$$

とおくと

$$\left|(1-z)^2\int_{-\delta}^{-0} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\,dA(\theta)\right| < 2|1-z|^2\frac{(A(-0)-A(-\delta))}{(1-|z|)^2}$$

然るに Stolz 領域 $\triangle$ 内では $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} < K$ 故

$\delta < \delta_1(\varepsilon)$ なる δ に対して

$$\left| (1-z)^2 \int_{-\delta}^{-0} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2} dA(\theta) \right| < 2K^2 (A(-0)-A(-\delta)) < \varepsilon,$$

$$\delta < \delta_1(\varepsilon)$$

次に $\delta(<\delta_1(\varepsilon))$ を固定し，$k = \min\limits_{\substack{-\pi \leqq \theta \leqq -\delta \\ z \in \triangle}} |e^{i\theta}-z| > 0$

とおくと，

$$\left| (1-z)^2 \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2} dA(\theta) \right| < |1-z|^2 \frac{2}{d^2} (A(-\delta)-A(-\pi))$$

故に $\delta_2(\varepsilon)$ を十分小さくすると，$z \in \triangle$, $|1-z| < \delta_2(\varepsilon)$ に於て

$$\left| (1-z)^2 \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{2e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2} dA(\theta) \right| < \varepsilon$$

となる。

故に　$z \to 1$ $(z \in \triangle)$ の時

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^2 J_1 = 0 \cdots ②$$

同様にし，

$$\lim_{z \to 1} (1-z)^2 J_2 = 0 \cdots ③$$

を得る。

① 式から

$$-\frac{f'(z)}{f(z)}(1-z)^2 = 2d + (1-z)^2 J_1 + (1-z)^2 J_2 \cdots ①'$$

①', ②, ③ から， $-\lim_{z \to 1} \frac{f'(z)}{f(z)}(1-z)^2 = 2d$

即ち

$$\lim_{z \to 1} \frac{f'(z)}{f(z)}(1-z)^2 = -2d = 2c$$

$$-\infty < c = -d \leqq 0$$

となり証明される。

（証 終）

5 次に Unkelbach による D の評価は $f(0)=0$ を仮定しておるが，$f(0)\neq 0$ の時に，$f'(0)=\rho e^{i\varphi}$ による D の評価を考へる。

定理 7. $f(z)$ は $|z|<1$ で正則，$|f(z)|<1$，$f(0)\neq 0$ とし，$f'(0)=\rho e^{i\varphi}$ とおくと，$f(z)$ の $z=1$ に於ける角微係数 D は

$$D \geqq \frac{\rho}{(1+|f(0)|)^2} > \frac{\rho}{4}$$

となる。

［証］ Caratheory の定理により

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} \geqq \frac{1}{D}\,\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$z=0$ とおくと

$$D \geqq \frac{|1-f(0)|^2}{1-|f(0)|^2} \qquad ①$$

然るに，

$$f_1(z) \equiv \frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)} \cdot \frac{1}{z}$$

は $|z|<1$ で正則で，

又 $$w(z) = \frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$$

とおくと，$w(z)$は $|z|<1$ で正則，$w(0)=0$，$|w(z)|<1$
故に schwarz の定理により，

$$|w(z)| \leqq |z|, \quad \therefore \left|\frac{w(z)}{z}\right| \leqq 1$$

即ち，$$|f_1(z)| \leqq 1$$

然るに $z \to 0$ ならしめると

$$f_1(0) = \frac{f'(0)}{1-\overline{f(0)}f(0)}$$

故に

$$\left|\frac{f'(0)}{1-|f(0)|^2}\right| \leqq 1 \quad \therefore \frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2} \leqq 1$$

$$\therefore 1-|f(0)|^2 \geqq |f'(0)| \quad \therefore 1-|f(0)| \geqq \frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|} \cdots ②$$

① から，

$$D \geqq \frac{|1-f(0)|^2}{1-|f(0)|^2} \geqq \frac{(1-|f(0)|)^2}{1-|f(0)|^2} = \frac{1-|f(0)|}{1+|f(0)|}$$

② を代入して

$$D \geqq \frac{|f'(0)|}{(1+|f(0)|)^2} = \frac{\rho}{(1+|f(0)|)^2} > \frac{\rho}{4}$$

［系］　定理の仮定の下に $|f'(0)| \geqq \rho$ ならば

$D > \dfrac{\rho}{4}$ となる。

$\boxed{6}$ 最後に，講究録，第三巻，十三，十四号で述べた $\boxed{\text{定理 1}}$

$f(z)$ が $|z|<1$ で 正則で，$|f(z)|<1$，$f(z)$ の零点を $\{z_n\}$ とし $f(z)$ の $z=1$ に於ける角微係数を D とすると，

$$D \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$$

である。

に於て， 等号 $D = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$ の成立する場合は，

$f(z)$ が如何なる形である時かをこゝで補っておく。

$\boxed{\text{定理 1. 追加}}$

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2} \quad \text{となるのは}$$

$$f(z) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n} \cdot \frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}$$

なる時に限る。

［証］　$\prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\bar{z}_n}{1-z_n} \cdot \dfrac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}$ は $|z| \leqq r < 1$ で絶対一様収斂することが次のようにしていわれる。即ち

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n}\cdot\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}\right| = \prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}\right| = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\bar{z}_n|}\left|\frac{z-z_n}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right|$$

$$= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|}\prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-z_n}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right|$$

Blaschke
~~BLASCHHE~~の定理により　$0<\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$ であり

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{z-z_n}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right|\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z_n-\frac{1}{\bar{z}_n}}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|}$$

$|z| \leqq r < 1$ 故

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-|z_n|)}{1-r} = \frac{2}{1-r} = \frac{2}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)$$

Blaschke
~~BLASCHKE~~の定理より，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<\infty$　故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{z-z_n}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right|\right)<\infty$$

となる

故に　$|z| \leqq r < 1$ で一様に　$0<\prod_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-z_n}{z-\frac{1}{\bar{z}_n}}\right|<\infty$

依つて　$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\bar{z}_n}{1-z_n}\cdot\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}$ は　$|z|<1$ で正則となる。

Herzig
~~HERZIG~~の定理により　等号は $f(z)$ が ２の函数の時に限ることが分る。　　　　（証　終）

（23. 9. 11）