⑦ 単葉円に就いて

鍋島　一郎

$\boxed{1}$ 領域D内で正則な函数があり，その領域内の一点 $Z=a$ の或る近傍，例へば円；$|Z-a|<R$ に於て単葉となる時，この円を単葉円という。

領域D内の正則函数の単葉性をその導函数から判定する定理として次の定理がある。即ち，

[定理] 1. $F(Z)$ が凸領域D内で正則で，$F'(Z)$ がDに於て採る値が原点を含まない或る一つの半平面内に在れば，$F(Z)$ はDに於て単葉となる。

この定理を用ひて実際に考へる場合には

或る w_0 $(\neq 0)$ に対し

$$(A) \qquad |F'(Z)-w_0|<|w_0| \qquad Z\in D$$

を満足する事を単葉なる為の十分條件としてゐる。しかし，必らずしも (A) なる條件のみでなくてもよい。

即ち，次の事が成立する。

[定理] 2. $F(Z)$ が凸領域Dに於て正則とする時，$F'(Z)$ が任意の $|w_0|\neq 0$，$\neq 1$ に対し，

$$(B) \qquad \left|\frac{F'(Z)-w_0}{1-\overline{w_0}F'(Z)}\right|<|w_0|$$

或は，任意の $|w_0|\neq 0$ に対し

$$(C) \qquad \left|\frac{F'(Z)-w_0}{F'(Z)+w_0}\right|<1 \quad 又は \quad >1$$

を満足するならば $F(Z)$ は D に於て単葉となる。

このことは (B)，(C) から定理1がいはれる事から明らかである。

$\boxed{2}$ (A), (B), (C) なる判定條件を用ひて次の定理を得る。

[定理] $F(Z)$ が $|Z|<1$ で正則とし，$|F'(0)|>2$ とする。

$$|\arg(F'(Z)-F'(0)+1)|<\frac{\pi}{2}$$

ならば $F(Z)$ は

$$|Z|<\frac{|F'(0)|-2}{|F'(0)|}$$ で單葉となる。

[証明] $w_0=F'(0)-1$ とおく。

$\log(F'(Z)-w_0)$ を考へれば

$$|\mathfrak{I}\log(F'(Z)-w_0)|=|\arg(F'(Z)-w_0)|<\frac{\pi}{2}$$

故に $$G(Z)=\frac{1-e^{\log(F'(Z)-w_0)}}{1+e^{\log(F'(Z)-w_0)}}=\frac{1-(F'(Z)-w_0)}{1+(F'(Z)-w_0)}$$

は $|Z|<1$ で正則で $|G(Z)|\leqq 1$, $G(0)=0$

となる。

故に Schwarg の定理により

$$\left|\frac{1-(F'(Z)-w_0)}{1-(F'(Z)-w_0)}\right|\leqq|Z|$$

故に $$|F'(Z)-w_0|\leqq\frac{1+|Z|}{1-|Z|}$$

依って $$\frac{1+|Z|}{1-|Z|}<|F'(0)|-1\leqq|F'(0)-1|=|w_0|$$

なる領域に於て $|F'(Z)-w_0|<|w_0|$ となる故 (A) により $F(Z)$ は單葉となる。

即ち $$|Z|<\frac{|F'(0)|-2}{|F'(0)|}$$ に於て $F(Z)$ は單葉となる。

次の定理は (B) を用ひて簡單に証明される。

[定理] $F(Z)$ は $|Z|<1$ で正則，$|F'(Z)|<M$ とする。

$$F'(Z_0)=w_0\neq 0$$

とすると，

$$円う\quad \left|\frac{Z-Z_0}{1-\bar{Z}_0 Z}\right| < \frac{|w_0|}{M}$$

に於て F(Z) は単葉である。

［証明］ $\left|\dfrac{F'(Z)}{M}\right| < 1$

Schwarz の定理により

$$\left|\frac{\dfrac{F'(Z)}{M}-\dfrac{w_0}{M}}{1-\dfrac{\bar{w}_0 F'(Z)}{M}}\right| \leqq \left|\frac{Z-Z_0}{1-\bar{Z}_0 Z}\right|$$

となる。（B）により

$$\left|\frac{Z-Z_0}{1-\bar{Z}_0 Z}\right| < \frac{|w_0|}{M}$$

なる円内で $\dfrac{F(Z)}{M}$，従ってF(Z)は単葉となる。

［定理］ F(Z) は $|Z|<1$ で正則とし，$|F'(Z)|<1$ とする。 $Z=1$ に於ける $F'(Z)$ の角微係数を D_1 とすると，

中心 $\dfrac{D_1}{D_1+1}$ ，半径 $\dfrac{1}{D_1+1}$ の円内で F(Z) は単葉となる。

［証明］ 角微係数に関する *Caratheodory* の定理を F′(Z) について用ひると，その証明から明らかな如く，

$$R\left(\frac{1+F'(Z)}{1-F'(Z)}\right) \geqq \frac{1}{D_1} R\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

が成立する。即ち

$$\left|\frac{F'(Z)+1}{F'(Z)-1}\right| \geqq R\left(\frac{1+F'(Z)}{1-F'(Z)}\right) \geqq \frac{1}{D_1} R\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

$$= \frac{1}{D_1}\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2}$$

となるから（C）なる條件から

$\frac{1}{D_1}\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 1$，即ち

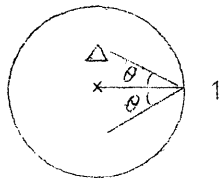
$$\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > D_1$$

なる円内でF(Z)は単葉となる。

[3] F(Z)が$|Z|<1$で正則で、$|f(Z)|<1$の時，$Z=1$に於けるF(Z)の角微係数をDとする。

$Z=1$に至るStolz領域を△とし，その開きの角を2θとし

$$K = \frac{2+\cos\theta}{\cos\theta}$$



とおく．

［定理］F(Z)は$|Z|<1$で正則とし，$|F(Z)|<1$とする。$Z=1$に於けるF(Z)の角微係数をDとすると，

$$D < \frac{1+K^2}{K^2 A}$$

但し，
$$A = \lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|F(Re^{i\varphi})|^2}{|1-F(Re^{i\varphi})|^2}\,d\varphi$$

ならば F(Z)はStolz領域 △ 内で単葉となる。

［証明］
$$f(Z) = \frac{1+F(Z)}{1-F(Z)}$$

とおくと，
$$f(Z_1)-f(Z_2) = \frac{2(F(Z_1)-F(Z_2))}{(1-F(Z_1))(1-F(Z_2))}$$

となるから，f(Z)が単葉ならばF(Z)も単葉となる。

然るに
$$\mathfrak{R} f(Z) = \frac{1-|F(Z)|^2}{|1-F(Z)|^2} > 0$$

となるから
$$A(\theta) = \lim_{R\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta}\mathfrak{R}\, f(Re^{i\varphi})\,d\varphi \quad (R<1)$$

とおくと，
$$f(Z) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,dA(\theta) + i\,\mathfrak{J}F(0)$$

なる Poisson－Stieltzes積分で表はされる。

今，Z_1，Z_2，を △ 内の任意の二点とすると，

$$f(Z_1)-f(Z_2)=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+Z_1}{e^{i\theta}-Z_1}-\frac{e^{i\theta}+Z_2}{e^{i\theta}-Z_2}\right)dA(\theta)$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2e^{i\theta}(Z_1-Z_2)}{(e^{i\theta}-Z_1)(e^{i\theta}-Z_2)}dA(\theta)$$

故に

$$\left|\frac{f(Z_1)-f(Z_2)}{Z_1-Z_2}\right|=2\left|\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-Z_1)(e^{i\theta}-Z_2)}dA(\theta)\right|$$

$$=2\left|\int_{-0}^{+0}\frac{dA(\theta)}{(1-Z_1)(1-Z_2)}+\left(\int_{-\pi}^{-0}+\int_{+0}^{+\pi}\right)\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-Z_1)(e^{i\theta}-Z_2)}dA(\theta)\right|$$

然るに，Herzigの定理により

$$\int_{-0}^{+0}dA(\theta)=\frac{1}{D}$$

であり，$A(\theta)$ は単調増加であるから，

$$\left|\frac{f(Z_1)-f(Z_2)}{Z_1-Z_2}\right|\geqq 2\left\{\frac{1}{D|1-Z_1||1-Z_2|}-\left(\int_{-\pi}^{-0}+\int_{+0}^{+\pi}\right)\frac{dA(\theta)}{(1-|Z_1|)(1-|Z_2|)}\right\}$$

故に

$$\left|\frac{f(Z_1)-f(Z_2)}{Z_1-Z_2}\right|\frac{|1-Z_1||1-Z_2|}{2}$$

$$\geqq\frac{1}{D}-\left(\int_{-\pi}^{-0}+\int_{+0}^{+\pi}\right)\frac{|1-Z_1|}{1-|Z_1|}\cdot\frac{|1-Z_2|}{1-|Z_2|}dA(\theta)$$

となる。然るに $\dfrac{|1-Z_1|}{1-|Z_1|}\leqq K$，$\dfrac{|1-Z_2|}{1-|Z_2|}\leqq K$

であるから

$$\frac{|f(Z_1)-f(Z_2)|}{2|Z_1-Z_2|}|1-Z_1||1-Z_2|\geqq\frac{1}{D}-K^2\left\{A(-0)-A(-\pi)+A(\pi)-A(+0)\right\}$$

$$\geqq\frac{1}{D}-K^2\left\{A-\frac{1}{D}\right\}$$

となる。

故に $\dfrac{1}{D} - K^2 \left\{ A - \dfrac{1}{D} \right\} > 0$

ならば

$$|f(Z_1) - f(Z_2)| > 0$$ となり $f(Z)$ が △ で，

單葉 依って F(Z) が △ で單葉となり。

即ち

$$D < \frac{1 + K^2}{K^2 A}$$

ならば F(Z) は △ 内で單葉となる。