43 一般統計推論について

所員　松下嘉米男

従来、数理統計の主要問題である Estimation 及び Test に関しては、Fisher, Neyman-Pearson の理論があり、広く之が応用されて来たことは周知の通りである。併し、統計推論に於ける問題は、勿論 Estimation 或は Test のみではなく、且又、上記理論も種々不備な点を有してゐることがわかつて来た。そこで、之等に対し、種々な研究が為されたのであるが、その中に A. Wald の発表した Test, Estimation 等を含む非常に一般的な理論がある*)。

*) A. Wald, Contribution to the theory of statistical Estimation and Testing Hypothesis. Ann. Math. Stat. 1939; On the principles of Statistical Inference. Notre Dame Lecture 1, 1942; On the statistical Decision Function which minimize the Maximum Risk, Ann. Math, 1945.

この理論は、未だその問題の解を決定する一般的な理論方法を与へてはゐず、之を未解決の問題として残してゐるとは云へ、その解の性質及び存在を明かにし、解を見出す方向への拠り処を与へてゐる。この点に於て、之は矢張り理論統計に於ける一つの勝れた数学的理論であると思はれる。それにつけても、Wald の発表に於ては、従来の Estimation, Test に於けると同様に Sample space はユークリッド空間にとり、分布函数のユー

クリッド空間に於ける Parameter のみを問題にしてゐるのであるが、実は之は少しの Modification により、Sample space をより一般な空間にし、分布函数に関しても、より一般にして取り扱ふ理論となることが分る。それで以下本稿に於ては、これ等のことを、Waldの理論の紹介傍ら述べてみようと思う。

1. 問題の formulation、こゝでも問題にしてゐる量に対し、一つの population を考へ、これの分布函数に関する事柄を、観測された量より推論することは、普通の通りである。先づ、観測される量の取り得べき値の空間、所謂 Sample space を R とし、R に於ける分布函数、即ち R に於て定義される total measure 1 たる measure の作る空間を Ω とする。こゝで、問題にしてゐる population π の分布函数は Ω の中に入つてゐるものとする。そこで問題に応じて Ω の適当な部分集合 ω の集合 S を定め、S の各 ω に対し π の未知の分布函数 X はこの ω に入つてゐるといふ仮説 H_ω をたてる。そして得られた Sample point より、何れの H_ω を採択すべきかを定めるのである。問題をこの様に formulate すると、Test, Estimation は勿論、その他の問題も之に含まれることになる。即ち S を Ω の各点（こゝで一点とは一点より成る集合の意味とする）及びその補集合より成る集合とすれば、それは Test の問題になる。尚、S が $\omega_1, \omega_2, \omega_3$（少くとも一つの ω は二点以上を含むとする）より成る場合は Test の問題でも、又、Estimation の問題でもないが

上述の特別な場合である。

さて、問題を上の様に formulate すると、Sample space の各点に一つづゝ S の集合を対応させることが問題になる。この写像を"うまく"定めることが出来れば、問題は解けたことになる。この写像を statistical decision function 或は単に decision function といひ、S.d.f. 又は d.f. と略記する。この写像に於て、一つの ω に対する R の凡ての点の集合が、H_ω の region of acceptance と呼ばれるもので、Test の場合には、この補集合が所謂 H_ω の critical region である。さて、この S.d.f. を定めるのであるが、それには次の様な考へ方で進む。先づ、各場合に応じ、X が真なる分布函数なるとき、H_ω なる仮説を採択した結果、犯す誤の度を表はす数 $W(X, \omega)$ を定める。こゝで勿論、$X \in \omega$ ならば $W(X, \omega) = 0$、そうでないときは $W(X, \omega) > 0$ とする。この $W(X, \omega)$ は明かに X と ω の函数であるが、之を weight function（略して W.f. と記す）という。この函数は、その場合々々に応じて定めるべきもので、之を定めることは統計的或は数学的な問題ではない。この W.f. を定めた上で、一つの S.d.f. $\omega = \omega(t), t \in R$ に対し、この犯す誤りを見積るのであるが、それを凡ての $t (\in R)$ に対する $W(X, \omega(t))$ の平均

$$\int_R W(X, \omega(t))\, dX$$

空間 R に於て X なる測度による積分を表はす

によって測る。之は X なる分布函数に対し、S.d.f. $\omega(t)$ の risk の度を表はすものである。

* それはaddmissibleであるという。そうするとS.d.fとしては先ずadmissibleなものを選ばねばならない。然るにadmissibleなd.f.は一般に幾つかあり従って又この中よりの選定の規準を立てねばならない。例へば今二つのadmissibleな

故に、Xが真の分布函数なるときは、この積分を最小にする様にS.d.f.を定めようといふわけである。併し、実際は真なる分布函数が未知なる故、之は出来難い。そこで、上の積分をXとd.f. $w(t)$の函数と考へ、この函数を考察の対象とする。之をrisk functionと云ひ、$r(X, w(t))$で表はす。この$r(X, w(t))$を凡てのXに於て最小にする様にd.f.を定めることが出来ればよいわけであるが、Ωが多くの点を含む様な場合には、一般にそれが出来難い。それ故、他にS.d.f.を定める規準を設けねばならないが、先づ言葉の説明をする。一つのSとWに関し、二つのS.d.f. $w_1(t)$, $w_2(t)$があるとき、凡てのXに対し

$$r(X, w_1(t)) \leqq r(X, w_2(t))$$

ならば、$w_1(t)$は$w_2(t)$より一様に良いといふ。又、一つのS.d.f.があつて、それより一様によいS.d.f.が存在しないとき、*上段三行挿入 (~~それはadmissibleなものを選ばねばならない。然るにadmissibleな~~)d.f.があつて、観測されたsample pointより、之に従って夫々、H_w, $H_{w'}$を採択した場合、分布函数に関する他の知識より、一方が他方より好ましいとして、それを採ることがあらう。このやうに他の知識によりS.d.f.を定めることが出来る場合もある。又、一般に分布函数に関する所謂a prioriな確率がわかつてゐる場合、即ちΩにμなる分布があることがわかつてゐる場合には、risk functionの此の分布に関する積分、即ちriskのμに関する平均、average risk

$$\int_{\Omega} r(x,w)\,d\mu$$

を考へ、之を最小にするやうに S.d.f. $W(\tau)$ をきめることにする。しかしながら一般に *a priori* な確率は第一其の存在がわからないし、又存在したとしても其の形がわからないことが多い故、此の場合には如何にすべきかが次に問題になる。之に対しては次のやうに考へる。即ち risk function $r(x,w)$ の x に関する Maximum（之を Maximum risk と言ひ、略して Max. risk と記す）を考へ之を最小にするやうな s.d.f. を撰ぶことにする。故にこの様な場合には admissible で且 Max risk を min にするやうな、s.d.f. を選ぶことにするのである。此の様な s.d.f. を optimum s.d.f.（略して O.s.d.f. 又は O.d.f. と記す）と言ふ。従つて s.d.f. としては optimum なものをとると言ふ原則を立てる。

以下に於ては或る條件のもとに於て S.d.f. の存在及び其の特性、之に対する risk function の性質等を述べる。

2. 一般論の point estimation への reduction. 前節で述べた様に、Ω の subset の集合 S 及びこれに対する、weight function $W(x,\omega)$ があるとき、O.d.f. を求めるのが問題であるが、今 S の濃度が Ω の濃度より大きくないとする。そうすると Ω より S への写像が考へられる。即ち、Ω の各 x に対し S の一つの ω が対応し、S の一つの ω には少くとも一つの Ω の元が対応する様に出来る。之を $\omega=\alpha(x)$ と記す。そこで Ω の凡ての点より成る集合

をS^*とし、且つこのS^*に対するweight function $W^*(x,\bar{x})$を　$W^*(X,\bar{x})=W(X,\lambda(\bar{x}))$

と定義する。このS^*に対するd.f.はSample space RよりΩの中への点写像である。それ故、この写像を被point estimateとか、Xのestimateとか云ふ。それで、若しSとS^*が一致するときは、estimateなる言葉をS.d.f.と同じ意味に用ふることにする。さて、上記S^*及び$W^*(X,\bar{x})$に対するO.d.f.を$x=\varphi(t)$とすると、$\omega(t)=\lambda(\varphi(t))$なるd.f.は元のS及び$W(X,\omega)$に対するO.d.f.なることが

$$\int_R W(X,\omega(t))dX=\int_R W(X,\lambda(\varphi(t)))dX=\int_R W^*(X,\varphi(t))dX$$

なることより、直ちにわかる。この様に、一般にSと、$W(X,\omega)$によって与へられる問題には、上記の様なS^*, $W^*(X,\bar{x})$による問題が対応し、始めのものに対するO.d.f.は後のものより、上記の様にして得られる。従ってpoint estimationの問題だけを考へれば充分なることがわかる。故に以下に於ては、SはΩの点凡てより成る集合とする。

3、基礎になる仮定、　次にpoint estimationの問題を取扱ふのであるが、議論を進めて行く上に於て基礎になる種々な仮定を述べておく。

仮定1. Sample space Rは次の様な性質を持つtopological spaceとする、即ち、

i) Rの凡てのopen setより生成されるσ系をΥとす

ると、之に Lebesgue 式測度 $m(E)$ $(E \in \gamma)$ が定義されてある。

ii) γ に含まれる bicompact な部分空間の増大列 $\{R_n\}$ で、R に収斂するものがある、即ち

$$R_1 \subset R_2 \subset \cdots \cdots \to R \qquad R_i \in \gamma \quad \text{bicompact},$$

仮定2. R に於ける分布函数 (distribution) の集合、即ち γ に対して定義される total measure 1 なる測度の作る空間 Ω に一つの topology が定義され、これに関し、Ω は compact, regular 且、第二可附番公理を満足するとする。尚、Ω の各元 $X(E)$ は R に於ける $m(E)$ に関し絶対連続とする、即ち、

$$X(E) = \int_E P(x, t)\,dm$$

なる所謂密度函数 $P(X, t)$ を有するとする。而も、この $P(X, t)$ は Ω と R の積空間の $\Omega \times R$ に於て連続とする。

Ω の凡ての open set より生成される σ 系を $\mathcal{Y}$ と記す。

仮定3. $\Omega \times \Omega$ に次の様な性質を持つ weight function $\varpi(X, X')$ が定義されてゐるとする。

1). $\varpi(X, X')$ は実数値を有し、且

$$1 \geqq \varpi(X, X') \geqq 0$$

2). $X = X'$ ならば $\varpi(X, X') = 0$

3). Ω に次の様な分割が可能である、即ち、

$$\Omega = \Omega_1 + \cdots \Omega_k, \quad \Omega_i \in \mathcal{Y}$$

$\varpi(X, X')$ は $\Omega_i \times \Omega_j$ $(i, j = 1, \cdots k)$ で連続、且各 $\overline{\Omega}_i \times \overline{\Omega}_j$ で連続な函数 $\varpi_{ij}(X, X')$ があつて、

$\varpi_{ij}(x, x') = \varpi(x, x')$, for $(x, x') \in \Omega_i \times \Omega_j$.

x、$x' \in \bar{\Omega}_j - \Omega_j$ ならば、凡ての $x \in \Omega$ に関し

$x \in \Omega_i$ ならば $\varpi_{ij}(x, x') = \varpi_{ij}(x, x'')$, $x'' \in \Omega_j$

なる x'' がある。從って

$$= \varpi(x, x'')$$

そうすると、この $\varpi(x, x')$ は $y + y$ に関し、

measurable になることは容易にわかる。

次に、凡ての x に対して

$$\varpi(x, x') = \varpi(x, x'')$$

なるとき、x' と x'' は、$\varpi(x, x')$ に関し、interchangeable

といふ。

假定4、一つの y に対して定義された測度 μ によ

る変数 x に関する積分

$$\int_\Omega \varpi(x, x') p(x, t) \, d\mu$$

が、t を fix した場合、$x' = x_1, x_2$ に於て、最小

になるならば、x_1, x_2 は interchangeable とする。

4) $\bar{\Omega}_i$ は Ω_i の closure を表はす。

4、o.d.f. と risk function. y に一つの分布 μ が与へら

れてゐるときは、x の estimate、即ち R より Ω への Abbi-

ldung $x = \varphi(t)$ $(t \in R, x \in \Omega)$ で、$\varpi(x, \varphi(t))$ が $y \times r$

に関し meßbar になり、且

$$r(\varphi, \mu) = \int_\Omega r(x, \varphi) \, d\mu = \int_\Omega \int_R \varpi(x, \varphi(t)) p(x, t) \, dm \, d\mu$$

を最小にする $\varphi(t)$ を定めるのが、問題であるが、今 x_0

に関する積分

$$\int_\Omega \varpi(x, \bar{x}) p(x, t) \, d\mu$$

を考へると之はμと、$\overline{x}$, tの函数である、そこで、μとtをfixしてこれを考へると、先づ

$$\int_{\Omega} \varpi(x,\overline{x})\, p(x,t)\, d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j} \varpi(x,\overline{x})\, p(x,t)\, d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\overline{x})\, p(x,t)\, d\mu$$

こゝで$\varpi_{ji}(x,\overline{x})\, p(x,t)$は$\overline{\Omega}_j \times \overline{\Omega}_i$に於て連続なる故、　　を定めると、各$x$, $\overline{x}$に対して

$x', x'' \in U_x$, $\overline{x}', \overline{x}'' \in U_{\overline{x}} \to |\varpi_{ji}(x',\overline{x}')p(x',t) - \varpi_{ji}(x'',\overline{x}'')p(x'',t)| < \varepsilon$

なる近傍U_x、$U_{\overline{x}}$が存在する。今$\overline{x}$をfixし：$\overline{\Omega}_j$の凡てのxに関し上の様な近傍U_xを考へると、$\overline{\Omega}_j$はbicompactなる故、有限個のこの様な近傍$U_{x_1}, \cdots, U_{x_e}$で覆はれる。之に対する$\overline{x}$の近傍を夫々、$U_{\overline{x},1}, \cdots, U_{\overline{x},e}$とし、$U_{\overline{x},0}$を$U_{\overline{x},0} \subseteq U_{\overline{x},1} \cap \cdots \cap U_{\overline{x},e}$なる一つの近傍とすれば、凡ての$x \in \overline{\Omega}_j$に対し

$\overline{x}' \in U_{\overline{x},0} \to |\varpi_{ji}(x,\overline{x}')p(x,t) - \varpi_{ji}(x,\overline{x})p(x,t)| < \varepsilon$,

従って

$\overline{x}' \in U_{\overline{x},0} \to \left| \int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\overline{x}')p(x,t)d\mu - \int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\overline{x})p(x,t)d\mu \right| \leq \varepsilon \cdot \mu(\Omega_j) \leq \varepsilon$

故に$\int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\overline{x})\, p(x,t)\, d\mu$は$\overline{\Omega}_i$で連続、従って$\sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\overline{x})\, p(x,t)\, d\mu$は$\overline{x}$の函数として$\overline{\Omega}_i$で連続である。而も、之は$\Omega_i$の中では

$\int_\Omega \varpi(x,\bar{x})p(x,t)d\mu$ に等しい。換言すれば、

$\int_\Omega \varpi(x,\bar{x})p(x,t)d\mu$ は $\bar{x}$ の函数として Ω_i 内で連続で、この Ω_i 内に induce する函数は $\bar{\Omega}_i$ の上に連続に enveitem 出来る。さて、$\bar{\Omega}_i$ は Compact なる故 $\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega_j} \varpi_{ji}(x,\bar{x})p(x,t)d\mu$ は $\bar{\Omega}_i$ 内で、最大、最小をとる。例へば、最大値を $\bar{x}_0$、最小値を $\bar{x}_1$ でとるとする。このとき、若し $\bar{x}_0$、或は $\bar{x}_1$ が $\bar{\Omega}_i-\Omega_i$ の点とすると、ϖ_{ji} に関する仮定より、凡ての $j=1,\cdots k$ に対し、$x\in\Omega_j$ ならば、$\varpi_{ji}(x,\bar{x}_l)=\varpi_{ji}(x,\bar{x}')$、$\bar{x}\in\Omega_i$ ($l=0$, 或は 1) なる $\bar{x}_l'$ がある。そうすると、

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega_j}\varpi_{ji}(x,\bar{x})p(x,t)d\mu=\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega_j}\varpi_{ji}(x,\bar{x}')p(x,t)d\mu$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega_j}\varpi(x,\bar{x}_l')p(x,t)\,d\mu=\int_\Omega\varpi(x,\bar{x}_l')p(x,t)\,d\mu$$

となり $\bar{x}$ の函数 $\int_\Omega\varpi(x,\bar{x})p(x,t)d\mu$ は Ω_i の内で、最大値、最小値をとる、従って、次の lemma を得る。

lemma 1、 x に関する積分 $\int_\Omega\varpi(x,\bar{x})p(x,t)d\mu$ は $\bar{x}$ の函数として、各 Ω 内で連続で、Ω_i 内で最大値、最小値をとる。

そこで $\int_\Omega \overline{W}(X\,\overline{X})p(X,t)d\mu$ の各 Ω_i に於てとる最大、最小の値を較べると何れかが、最大最小になる。

従って、lemma 2' X に関する積分 $\int_\Omega \overline{W}(X\,\overline{X})p(X,t)d\mu$ は $\overline{X}$ の函数として Ω 内で、最大値、最小値をとる。

従って、今 $\int_\Omega \overline{W}(X\,\overline{X})p(x,t)d\mu$ を最小にする $\overline{X}$ の集合を $\omega_\mu(t)$ と記せば、之は分離空集合ではない。$\omega_\mu(t)$ の元を一般に $X_\mu(t)$ で表はすことにする。次に

lemma 2. 上の上で、$M\mu B$ の列 $\{\mu_n\}$ が一つの μ に収斂する｛即ち $\mu(\overline{E}-E^\circ)=0$ なる凡ての E に対し、$\mu_n(E)\to\mu(E)$｝ $f(x)$ を Ω 上の連続函数とすると $\mu(\overline{E}-E^\circ)=0$ なる E に対し

$$\int_E f(x)d\mu_n \to \int_E f(x)d\mu.$$

証明、Ω は compact なる故、$f(x)$ は有界、又連続なる故、分論 $\mathfrak{B}$ に関し、meßbar、今

$$\inf_{x\in E} f(x)=A, \qquad \sup_{x\in E} f(x)=B$$

とする。$A=B$ なるときは、lemma の成立することは、明か。そこで、$A<B$ とし、$\varepsilon>0$ に対し、

$$A=l_0<l_1<\cdots<l_\nu=B,\ l_{i+1}-l_i<\varepsilon\ (i=0,1,\cdots\nu-1)$$

とする、又之に対し、

$$E^\circ=(\overline{E^c})^c,\quad E^c=\Omega-E.$$

$$e_i=\{x;\ l_i\leq f(x)<l_{i+1},\ x\in E\},\ i=0,\cdots \nu-1$$

とする。そうすると、

$$0\leq\int_E f(x)d\mu_n-\sum_{i=0}^{k-1}l_i\mu_n(e_i)=\sum_{i=0}^{k-1}\{\int_{e_i}f(x)d\mu_n-$$

$$- l_i \mu_n(e_i)\}$$

$$\le \sum_{i=0}^{\nu-1}\{ l_{i+1}\mu_n(e_i) - l_i\mu_n(e_i)\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1}(l_{i+1}-l_i)\,\mu_n(e_i)$$

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\nu-1}\mu_n(e_i) = \varepsilon\cdot\mu_n(E) \le \varepsilon.$$

同様に、

$$0 \le \int_E f(x)\,d\mu - \sum_{i=0}^{k-1} l_i\,\mu(e_i) \le \varepsilon.$$

して、$f(x)$ は連続なる故、

$$\bar{e}_i = \{x;\ l_i \le f(x) \le l_{i+1},\ x\in \bar{E}\}$$

$$e_i^\circ = \{x;\ l_i < f(x) < l_{i+1},\ x \in E^\circ\}$$

故に

$$\bar{e}_i - e_i^\circ = \{x;\ f(x)=l_i \text{ or } l_{i+1},\ x\in\bar{E}\}$$
$$+ \{x;\ l_i<f(x)<l_{i+1},\ x\in \bar{E} - E^\circ\}$$

さて、一般に

$$\mu\{x;\ f(x)=\alpha\}>0$$

なる様な実数 α は高々可附番個である。それは

$$M_\alpha = \{x;\ f(x)\le\alpha\}$$

とし、

$$F(\alpha)=\mu(M_\alpha)$$

とおくと、

i) $\alpha<\beta \to F(\alpha) \le F(\beta)$

ii) $F(\alpha+0)=F(\alpha)$

iii) $F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1.$

即ち，$F(\alpha)$は一つの分布函数になつてゐる。処で、$F(x)$は単調なる故、不連続点は高々可附番個である、即ち、

$$F(\alpha-0)<F(\alpha)$$

なるαは高々可附番個。故に、

$$F(\alpha)-F(\alpha-0)=\mu(M\alpha)-\mu(\lim M\beta)$$
$$=\mu\{x;\ f(x)=\alpha\}>0$$

なるαは高々可附番個である。

そこで、前に契ると、

$$\mu\{x;\ f(x)=l\}>0$$

なるlは高々可附番個なる故、前の様なl_iの如何なる近傍にも、

$$\mu\{x;\ f(x)=l_i+\varepsilon_0\}=0$$

なる$l_i+\varepsilon_0$がある。そこで、始めの分割に於て、

$$\mu\{x;\ f(x)=l_i\}>0$$

なるl_iについては、

$$\mu\{x;\ f(x)=l_i+\varepsilon_{i0}\}=0,\quad \varepsilon_{i0}<\varepsilon$$

なる$l_i+\varepsilon_{i0}$にて置き換へ、それを改めて

$$A=l_0<l_1<\cdots<l_\nu=B$$

とすると、$l_{i+1}-l_i<2\varepsilon$　　$\mu\{x;\ f(x)=l_i\}=0.$
$(i=1,\cdots\nu-1)$、さうすると、

$$\mu(\overline{E}_i-E_{i0})=\mu\{x;\ f(x)=l_i,\ x\in E\}+\mu\{x;\ f(x)=l_{i+1},\ x\in E\}+\mu\{x;\ l_i<f(x)<l_{i+1},\ x\in \overline{E}-E'\}$$

故に　$i=1,\cdots,\nu-2$に対しては、

$$\leqq 0+0+\mu(\overline{E}-E^{\circ})=0.$$

又 $i=0$ なるときは、

$$\mu(\overline{e}_0-e_0^{\circ})=\mu\{x;f(x)=l_0=A,\ x\in\overline{E}\}$$
$$+\mu\{x;f(x)=l_1,\ x\in\overline{E}\}$$
$$+\mu\{x;A<f(x)<l_1,\ x\in\overline{E}-E^{\circ}\}$$

$\{x;f(x)=l_0,\ x\in\overline{E}\}\leq\overline{E}-E^{\circ}$ なる故

$$=0.$$

同様に

$$\mu(\overline{e}_{k-1}-e_{k-1}^{\circ})=0$$

故に

$$\mu_n(e_i)\to\mu(e_i),\quad i=0,\cdots,\nu-1$$

故に、$n>n_0$ に対し

$$|\mu_n(e_i)-\mu(e_i)|<\frac{\varepsilon}{k},\quad i=0,\cdots,\nu-1$$

なる様に n_0 をとると、

$$0\leq\int_E f(x)d\mu_n-\sum^{\nu-1}l_i\,\mu_n(e_i)\leq 2\varepsilon$$

$$0\leq\int_E f(x)d\mu-\sum_{i=0}^{\nu-1}l_i\mu(e_i)\leq 2\varepsilon$$

なる故、

$$\left|\int_E f(x)d\mu_n-\int_E f(x)d\mu\right|\leqq\left|\sum_i l_i\{\mu_n(e_i)-\mu(e_i)\}\right|+2\varepsilon$$

$$\leq\sum_i|l_i|\cdot|\mu_n(e_i)-\mu(e_i)|+2\varepsilon$$

$n>n_0$ とすると、

$$\leq \sum_i |l_i| \frac{\varepsilon}{\nu} + 2\varepsilon$$

$$\leq C、\varepsilon + 2\varepsilon \qquad (C = Max、(|A|、|B|、))$$

$$= (C+2)\varepsilon、$$

$\varepsilon > 0$ は任意にとれる故

$$\int_E f(x)\,d\mu_n \to \int_E f(x)\,d\mu \quad (n \to \infty)$$

証終り

lemma 3. $\{f_n(x)\}$ を $f(x)$ に一様収斂する函数列とする。そして、各 $f_n(x)$ は $\mathfrak{F}$ に関し meßbar, $f(x)$ は各 Ω_i $(i=1,\cdots,k)$ 上で有界連続とする。尚、$\{\mu_n\}$ を $\mathfrak{F}$ 上で μ に収斂する Total maß 1 なる Maß の列とする。且又、$\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ) = 0$ $(i=1,\cdots,k)$ とする。然るときは

$$\int_\Omega f_n(x)\,d\mu_n - \int_\Omega f_n(x)\,d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

証明　$f_n(x) \to f(x)$ は一様収斂なる故、任意に定めた $\varepsilon > 0$ に対し、

$$n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (凡ての\ x\ に対し)$$

となる様な n_0 が存在する。そうすると $n > n_0$ ならば、

$$\left|\int_\Omega f_n(x)\,d\mu_n - \int_\Omega f(x)\,d\mu_n\right| \leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,d\mu_n$$

$$\leq \varepsilon \int_\Omega d\mu_n = \varepsilon、$$

又、同様に $n > n_0$ ならば

$$\left|\int_\Omega f_n(x)\,d\mu - \int_\Omega f(x)\,d\mu\right| \leq \varepsilon.$$

次に、$f(x)$ は Ω_i 上で連続、$\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ) = 0$ なる故

$$n > n_1^{(i)} \rightarrow \left| \int_{\Omega_i} f(x)\,d\mu_n - \int_{\Omega_i} f(x)\,d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{m},$$

なる$n_1^{(i)}$か、各iに対し夫々存在する。そこで、

$n_1 = \mathrm{Max.}\{n_1^{(1)}, \cdots, n_1^{(k)}\}$とすると、勿論

$$n > n_1 \rightarrow \left| \int_{\Omega_i} f(x)\,d\mu_n - \int_{\Omega_i} f(x)\,d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{k},$$

$$(i = 1, \cdots k).$$

従って、

$$n > n_1 \rightarrow \left| \int_{\Omega} f(x)\,d\mu_n - \int_{\Omega} f(x)\,d\mu \right| < \varepsilon.$$

従って

$n > \mathrm{Max.}(n_0, n_1)$ とすると、

$$\left| \int_{\Omega} f_n(x)\,d\mu_n - \int_{\Omega} f_n(x)\,d\mu \right| \leqq \left| \int_{\Omega} f_n(x)\,d\mu_n - \int_{\Omega} f(x)\,d\mu_n \right|$$

$$+ \left| \int_{\Omega} f_n(x)\,d\mu - \int_{\Omega} f(x)\,d\mu \right| < 3\varepsilon$$

εは任意にとれる故、之で証明された。

次に、$\mathfrak{Y}$上の一つの分布函数μを定めたとき、Rの各点tに対し、Ωの部分集合$\omega_\mu(t)$が定まるが、今各tに対するω_μ t) より一つづつ$x_\mu(t)$を選び出し、(選び方は任意だけれど、選び出したら定めておく) 之をRよりΩの中への写像と考へ、$\varphi_\mu(t)$と記す。そうすると、次のlemmaが成立する。

lemma 4. $\{\mu_n\}$を$\mathfrak{Y}$上μに収斂するTotalmaß 1なるMaßの列、$\{t_n\}$をR内でt_0に収斂する点列、尚又、$\mu(\overline{\Omega}_i - \Omega_i^{\circ}) = 0$ $(i = 1, \cdots, k)$とする。そうすると、xに関し一様に

$$\varpi(x, \varphi_{\mu_n}(t_n)) \rightarrow \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)), \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明、

$$\varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) \to \varpi(x, \varphi_{\mu}(t_0))$$

とすると、

$$\int_{\Omega} \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) p(x, t_0) d\mu \to \int_{\Omega} \varpi(x, \varphi_{\mu}(t_0)) p(x, t_0) d\mu.$$

何故ならば、今

$$\int_{\Omega} \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t\ )) p(x, t_0) d\mu \to \int_{\Omega} \varpi(x, \varphi_{\mu}(t_0)) p(x, t_0) d\mu$$

とする。そうすると、$x_n = \varphi_{\mu n}(t_n)$ の、無限に入る Ω がある、その一つを Ω_i とし、$\overline{\Omega_i}$ の中に於て、その収斂する部分列 $\{x_{n'}\}$ を選び出す。($\overline{\Omega_i}$ は compact)。そして、その極限を x^* とすると、$x^* \in \overline{\Omega_i}$、又、次の様に、$\varpi_j^*(x, x')$ なる函数を定義する、即ち

$$\varpi_j(x, x') = \begin{cases} \varpi_j(x, x'), & (x, x') \in \Omega_i \times \Omega_j \\ \text{const} \end{cases}$$

そうすると、函数

$$\varpi_i(x, x') = \sum_{j=1}^{k} \varpi_j{}^*(x, x')$$

は、各 x に対し、x' の $\overline{\Omega_i}$ での連続函数、而も $x \in \Omega_i$ なるときは、

$$\varpi_i(x, x') = \varpi(x, x')$$

故に、

$$\lim_{n' \to \infty} \varpi(x, x_{n'}) = \lim_{n' \to \infty} \varpi_i(x, x_{n'}) = \varpi_i(x, x^*)、$$

こゝで $\varpi_{ij}(x, x')$ に関する仮定より、

$$= \varpi_i(x, x') \quad x' \leftarrow \Omega_i$$

なる x' が凡ての x に共通に定まる。

從って

$$= \varpi(x, x')$$

となる。故に、

$$\int_\Omega \varpi(x, x_{n'}) p(x, t_0) d\mu \to \int_\Omega \varpi(x, x') p(x, t_0) d\mu,$$

從って、

$$\int_\Omega \varpi(x, x') p(x, t_0) d\mu = \int_\Omega \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) p(x, t_0) d\mu$$

故に　$x' \in \omega_\mu(t_0)$、$\omega_\mu(t_0)$ の各元は ϖ に関し、interchangeable なる仮定より、

$$\varpi(x, x') = \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) \quad \text{in } X.$$

故に、

$$\lim_{n' \to \infty} \varpi(x, x_{n'}) = \varpi(x, x') = \varpi(x, \varphi_\mu(t_0))$$

之は各 Ω_i 内の $\{x_n\}$ の收斂する凡ての部分列について云へることである。從って、之は亦 $\{x_n\}$ の凡ての收斂する部分列について云へる。故に

$$\lim_{n \to \infty} \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) = \varpi(x, \varphi_\mu(t_0))$$

となる。

從って、x に関する積分について

$$\int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) \cdot p(x, t_0) d\mu \to \int_\Omega \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) p(x, t_0) d\mu$$

ならば　$\varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) \to \varpi(x, \varphi_\mu(t_0))$

である。

さて、

$$\int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) p(x, t_0) d\mu \to \int_\Omega \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) p(x, t_0) d\mu.$$

とすると、

$$\int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n}(t_n)) p(x, t_0) d\mu \geq \int_\Omega \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) p(x, t_0) d\mu.$$

なる故、

$$(*) \quad \lim_{n' \to \infty} \left\{ \int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n'}(t_{n'})) p(x, t_0) d\mu - \int_\Omega \varpi(x, \varphi_\mu(t_0)) p(x, t_0) d\mu \right\} = \delta > 0.$$

なる部分列 $\{\varphi_{\mu n'}(t_{n'})\}$ が存在する。

又、$p(x, t)$ は連続なる故、任意に取った $\varepsilon > 0$ に対し、各 x に関して、その近傍 U_x, 及び整数 n_0 が定まり、

$$x' \in U_x, \ n > n_0 \to |p(x, t_0) - p(x', t_n)| < \varepsilon$$

となる。こゝで Ω は bicompact なる故 この様な近傍の有限個で覆はれる。それに対する有限個の n_0 の最大なるものを n_1 とすれば、凡ての x に対し、

$$n > n_1 \to |p(x, t_n) - p(x, t_0)| \leq 2\varepsilon$$

そうすると、$n > n_1$ に対し、

$$\left| \int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n'}(t_{n'})) p(x, t_{n'}) d\mu - \int_\Omega \varpi(x, \varphi_{\mu n'}(t_{n'})) p(x, t_0) d\mu \right|$$

$\leqq \int_{\Omega} |\varpi(X, \varphi_{\mu n'}(t_{n'}))| \cdot |P(X, t_{n'}) - P(X, t_0)| \cdot d\mu$

$\leqq 2\varepsilon$.

ε は任意にとれる故、之と(＊)より、

(＊＊) $\lim_{n'\to\infty} \{ \int_{\Omega} \varpi(X, \varphi_{\mu n'}(t_{n'})) P(X, t_{n'}) d\mu - \int_{\Omega_0} \varpi(X, \varphi_{\mu}(t_0)) P(X, t_0) d\mu \} = \delta > 0$

そこで、$\{\varphi_{\mu n'}(t_{n'})\}$ より、同一の Ω_i に属し収斂する部分列 $\{\varphi_{\mu n''}(t_{n''})\}$ を選び出す。

そして、その極限を X^* とすると、

$$\lim_{n''\to\infty} \varpi(X, \varphi_{\mu n''}(t_{n''})) = \lim \varpi_{\cdot i}(X, \varphi_{\mu n''}(t_{n''})) = \varpi_{\cdot i}(X \cdot X^*).$$

こゝで、$\varpi_{ij}(X, X')$ に関する仮定より、

$$= \varpi(X, X^{**}), \quad X^{**} \in \Omega_i$$

なる X^{**} がある。$\varpi_{ki}(X, X')$ は $\bar{\Omega}_k \times \bar{\Omega}_i$ で連続なる故、X に関し一様に、

$$\varpi_{\cdot i}(X, \varphi_{\mu n''}(t_{n''})) \to \varpi_{\cdot i}(X, X^*) = \varpi(X, X^{**})$$

$P(X, t_n)$ も $P(X, t_0)$ に X に関し一様に収斂する故、結局

$$\varpi(X, \varphi_{\mu n''}(t_{n''})) P(X, t_{n''}) \to \varpi(X, X^{**}) P(X, t_0), \text{ uniformley in } X.$$

同様に

$$\varpi(X, \varphi_{\mu}(t_0)) P(X, t_{n''}) \to \varpi(X, \varphi_{\mu}(t_0)) P(X, t_0), \text{ in } X$$

故に lemma 3 により、

$$\lim_{n''\to\infty}\left\{\int_\Omega \varpi(X,\varphi_{\mu n''}(t_{n''}))P(X,t_{n''})d\mu_{n''}-\int_\Omega \varpi(X,\varphi_{\mu n''}(t_{n''}))P(X,t_{n''})d\mu\right\}=0.$$

$$\lim_{n''\to\infty}\left\{\int_\Omega \varpi(X,\varphi_\mu(t_0))P(X,t_{n''})d\mu_{n''}-\int_\Omega \varpi(X,\varphi_\mu(t_0))P(X,t_{n''})d\mu\right\}=0$$

この二式と前の（＊＊）より明らかなる次式

$$\lim_{n''\to\infty}\left\{\int_\Omega \varpi(X,\varphi_{\mu n''}(t_{n''}))P(X,t_{n''})d\mu-\int_\Omega \varpi(X,\varphi_\mu(t_0))P(X,t_0)d\mu\right\}=\delta>0.$$

とより、n'' を充分大きくとると、

$$\int_\Omega \varpi(X,\varphi_{\mu n''}(t_{n''}))P(X,t_{n''})d\mu_{n''}>\int_\Omega \varpi(X,\varphi_\mu(t_0))P(X,t_{n''})d\mu_{n''}$$

なることが分る。之は $\varphi_{\mu n''}(t_{n''})$ が $\int_\Omega \varpi(X,\bar{X})P(X,t_{n''})d\mu_{n''}$

を最小にするといふ仮定に反する。

故に、

$$\varpi(X,\varphi_{\mu n}(t_n))\to\varpi(X,\varphi_\mu(t_0)).$$

又、この収斂の X に関し一様なることは、各 $\varpi(X,\varphi_{\mu n}(t_n))$, $\varpi(X,\varphi_\mu(t_0))$ は、X に関し各 Ω_i 内で連続、且その Ω 内に induce する函数は連続に $\overline{\Omega}_i$ に、enveitern 出来、而も $\overline{\Omega}_i$ は bicompact なることより

わかる。　　　　　　　　　　　　　証終り

このlemmaより、一つのμに対し、$X=\varphi_\mu(t)$なる写像を考へると、之自身の連続性はわからないが、$w(x,\varphi_\mu(t))$は、各iに対し、$\Omega_i\times R$で連続になることがわかる。（即ち、この写像$X=\varphi_\mu(t)$に於ては、$t_n\to t_0$、にして$w(x,\varphi_\mu(t_n))\not\to w(x,\varphi_\mu(t_0))$なることは有り得ないのである。）従って、$w(x,\varphi_\mu(t))$は$q\times r$に関しmeßbarとなる。

定理1、Ωに於ける一つの分布μに関する$X=\varphi_\mu(t)$に対し、その risk function $r(x,\varphi_\mu)$は、各Ω_iで連続、且そのΩ_iにinduceする函数は$\overline{\Omega_i}$の上に連続にenweitern出来る。故に勿論$r(x,\varphi_\mu)$はqに関しmeßbarである。

証明は先づ次のlemmaより始める。

lemma 5、任意の$\varepsilon>0$に対し、凡てのXに関し、

$$\int_{R_\varepsilon} p(x,t)\,dx \geq 1-\varepsilon$$

なるRの bicompact, closed な部分集合R_εが存在する。

証明、このlemmaが成立しないとすれば、Rに収斂する bicompact, closed な部分集合の列$\{R_n\}$の各R_nに対し、

$$\int_{R_n} p(x_n,t)\,dx < 1-\varepsilon$$

なるx_nがある。Ωは compact なる故、$\{x_n\}$より収斂する部分列$\{x_{n'}\}$が選べる。この極限をx_0とする。

そうすると、

$$\int_{R_n} p(x_0, t)\,dx \to \int_R p(x_0, t)\,dx = 1$$

なる故、

$l \geq n_0$ ならば $\int_{R_l} p(x_0, t)\,dx > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

なる n_0 がある。又、一方、

$$\int_{R_{n_0}} p(x_{n'}, t)\,dx \to \int_{R_{n_0}} p(x_0, t)\,dx$$

なる故、

$n' \geq n_0'$ ならば

$$\int_{R_{n_0}} p(x_{n'}, t)\,dx > 1 - \varepsilon$$

なる故、

$n' \geq n_0'$ ならば、$\int_{R_{n_0}} p(x_{n'}, t)\,dx > 1 - \varepsilon$

なる n_0' がある。そこで $l > \max(n_0, n_0')$、$l \in \{n'\}$ とすると、

$$\int_{R_l} p(x_l, t)\,dx \geq \int_{R_{n_0}} p(x_l, t)\,dx > 1 - \varepsilon.$$

之は矛盾である。　証終り。

定理1の証明。先づ任意に正数 ε を選び、之に対し Lemma 5 の様に R_ε をとると、

$w(x, \varphi_\mu(t))\,p(x, t_0)$ は $\Omega_i \times R$ で連続なる故、勿論、$\Omega_i \times R_\varepsilon$ で連続、R_ε は bicompact なる故、$w(x, \varphi_\mu(t))\,p(x, t)$ は x の函数として、R_ε 内の t に関し一様に連続である。依って一つの x 及

び ε に対し、その適当な近傍 U_x をとれば、R_ε の凡ての t に対し、

$$x' \in U_x \to |\varpi(x,\varphi_\mu(t'))p(x\,t)-\varpi(x',\varphi_\mu(t))P(x',t)|<\varepsilon$$

が成立する。そうすると、

$$x' \in U_x \to |\gamma(x,\varphi_\mu)-\gamma(x',\varphi_\mu)| = \left|\int_R \varpi(x,\varphi_\mu(t))P(x,t)\,dm - \int_R \varpi(x',\varphi_\mu(t))P(x',t)\,dm\right|$$

$$= \left|\int_{R_\varepsilon}(\varpi(x,\varphi_\mu(t))P(x,t)-\varpi(x',\varphi_\mu(t))P(x',t))\,dm + \int_{R-R_\varepsilon}\varpi(x,\varphi_\mu(t))p(x,t)\,dm - \int_{R-R_\varepsilon}\varpi(x',\varphi_\mu(t))P(x',t)\,dm\right|$$

$$\leqq \int_{R_\varepsilon}|\varpi(x,\varphi_\mu(t))P(x,t)-\varpi(x',\varphi_\mu(t))P(x',t)|\,dm + \int_{R-R_\varepsilon}|\varpi(x,\varphi_\mu(t))|\,P(x,t)\,dm + \int_{R-R_\varepsilon}|\varpi(x,\varphi_\mu(t))|\,p(x',t)\,dm.$$

$$\leqq \varepsilon\int_{R_\varepsilon}dm + \int_{R-R_\varepsilon}P(x,t)\,dm' + \int_{R-R_\varepsilon}P(x',t)\,dm.$$

$$\leqq \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon.$$

故に $\gamma(x,\varphi_\mu)$ は各 Ω_i 内で連続である。

尚、$\gamma(x,\varphi_\mu)$ の Ω_i の中に induce する函数が $\bar{\Omega}_i$ の上に連続に enveitern 出来ることは、上記 $\varpi(x,\varphi_\mu(t))$ の代りに $\varpi_i(x,\varphi_\mu(t))$ を考へればわかる。　　　　　　　　証終り。

定理2、Ω に於ける一つの分布 μ に対し、

$\int_{\Omega} r(x, \varphi)\, d\mu$ の値を最小にする様な d.f. $x=\varphi(t)$ が存在する。又、若し二つの d.f. $\varphi^*(t)$, $\varphi^{**}(t)$ が共にこの overage risk を最小にするならば、$r(x, \varphi^*) \equiv r(x, \varphi^{**})$、

証明　$W(x, \varphi(t))$ が $\mathfrak{J} \times \mathfrak{F}$ に関し measurable なる $\varphi(t)$ に関しては

$$\int_{\Omega} r(x, \varphi)\, d\mu = \int_{\Omega} \left\{ \int_R W(x, \varphi(t))\, p(x, t)\, dm \right\} d\mu$$

$$= \int_R \left\{ \int_{\Omega} W(x, \varphi(t))\, p(x, t)\, d\mu \right\} dm$$

なる故、$\varphi(t) = \varphi_\mu(t)$ とすれば、凡ての t に対し $\int_{\Omega} W(x, \varphi_\mu(t))\, p(x, t)\, d\mu$ が最小になる故、average risk も最少になる。

次に、$\varphi^*(t)$ が矢張り average risk を最小にするとする、このとき

$$R' = \{ t ;\ \varphi^*(t) \notin \omega_\mu(t) \}$$

とする。そうすると、$t \in R'$ なる凡ての t に対し

$$\int_{\Omega} W(x, \varphi^*(t))\, p(x, t)\, d\mu > \int_{\Omega} W(x, \varphi_\mu(t))\, p(x, t)\, d\mu$$

$\int_{\Omega} W(x, \varphi_\mu(t))\, p(x, t)\, d\mu$　$\int_{\Omega} W(x, \varphi^*(t))\, p(x, t)\, d\mu$ は $\mathfrak{F}$ に関し measurable なる故、$R' \in \mathfrak{F}$, そこで $m(R') > 0$ とすると、$R'' \ni t$ ならば

$$\int_{\Omega} W(x, \varphi^*(t))\, p(x, t)\, d\mu \geqq \int_{\Omega} W(x, \varphi_\mu\, p(x, t))\, d\mu + \delta$$

$\delta > 0$, $m(R'') > 0$, $R'' \leqq R'$ ならば、δ がある。之より

$$\int_{\Omega} r(x, \varphi^*)\, d\mu = \int_R \int_{\Omega} W(x, \varphi^*(t))\, p(x, t))\, d\mu\, dm$$
$$> \int_R \int W(x, \varphi_\mu(t))\, p(x, t))\, d\mu\, dm$$
$$= \int_{\Omega} r(x, \varphi_\mu)\, d\mu$$

之は $\varphi^*(t)$ の假定に反する。故に $m(R')=0$

従つて $r(x,\varphi^*)=\int_R W(x,\varphi^*(t))p(x,t)\,dm=\int_R W(x,\varphi_\mu(t))p(x,t)\,dm$

$$=r(x,\varphi_\mu)$$

証終り。

以下、各 μ に対し，之に関する *average risk* を最小にする様な d, f, $\varphi(t)$ による *risk* を $r_\mu(X)$ と記す

即ち。$r_\mu(X)=r(X,\varphi_\mu)$

定理 3. $\mu_u\to\mu$, $\mu(\bar{\Omega}_i-\Omega_i^\circ)=0$ $(i=1,\cdots,k)$ ならば一様に $r_{\mu_u}(X)\to r_\mu(X)$

証明、 *lemma* 5 により

$$W(X,\varphi_{\mu_u}(t))\to W(X,\varphi_\mu(t))$$

且 $W(X,\varphi_\mu(t))$ は有界，従つて

$$\int_R W(X,\varphi_{\mu_u}(t))\,dX\to\int_R W(X,\varphi_\mu(t))\,dX$$

$$\int_R W(X,\varphi_{\mu_u}(t))\,dX=\int_R W(X,\varphi_{\mu_u}(H))\,p(X,t)\,dm=r_{\mu_u}(X)$$

$$\int_R W(X,\varphi_\mu(t))\,dX=\int_R W(X,\varphi_\mu(t))\,p(X,t)\,dm=r_\mu(X)$$

故に $r_{\mu_u}(X)\to r_\mu(X)$

この收斂の X に関し、一様なことは，定理 2，及び各 $\bar{\Omega}_i$ の *bi compact* なることによりわかる。 証終り。

次に，$\int_\Omega r_\mu(X)\,d\mu=r_\mu$ と記すことにする。そこで，$\mathfrak{J}$ の一つの分布 λ があつて，凡て他の分布 μ に対し $r_\lambda\geqq r_\mu$ なるとき，λ を *least favorable distribution*（略して *l, f, d,* と記す）といふ。

そうすると

定理 4. *l, f, d,* は存在する。

この証明は，先づ次の *lemma* より始める。

lemma 6. $\mathfrak{T}$ に対する distribution の集合は Compact である。特に各分布に対し $\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ)=0$ なる條件をつけてもそうである。

証　明　分布の列を $\{\mu_n\}$ とし，Ω の Base を $e_1, e_2, \cdots\cdots$ とする。（Ω に於ける第二可附番公理）尚又，之に Ω，更に $\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ)=0$ なる條件があるときは $\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ$ $(i=1,\cdots\cdots k)$ を付け加へ，それを列べたものを $A_1, A_2, \cdots\cdots$ とする。そこで，数列 $\{\mu_n(A_1)\}$（有界）より収斂する部分列

$$\vdots \quad \mu_{1(1)}(A_1), \mu_{2(1)}(A_1), \mu_{3(1)}(A_1), \cdots\cdots$$

を選び出す。次に、数列 $\{\mu_{n(1)}(A_2)\}$ より収斂する部分列 $\{\mu_{n(2)}(A_2)\}$ を選び出す。以下順次この様にして進む。そこで $\mu_{n'} = \mu_{n(n)}$ として $\{\mu_n\}$ の部分列 $\{\mu_{n'}\}$ を選ぶと、之は $A_1, A_2, \cdots\cdots$ の凡ての上で収斂する。さて $\mu(A_i) = \lim_{n' \to \infty} \mu_{n'}(A_i)$ とする。

次に、一般の Ω の部分集合 E に対しては，之を有限又は可附番位の e_i で覆ひ，即ち $E \subset \bigcup e_i$ としこの様な $\bigcup e_i$ に対する $\sum \mu(e_i)$ の下限を $\mu(E)$ とする。即ち，

$$\mu(E) = \inf \Sigma_i \mu(e_i)$$

とする。そして，任意の集合 X に対し

$$\mu(X) = \mu(X \cdot E) + \mu(X \cdot E^c)$$

なるとき、E は μ に関し measurable とすると μ-measurable な集合は σ 系 $\mathfrak{T}^*$ をつくる。所で，Ω は metrisable なる故，各 e_i は従って e_i より生

ずる Borel 集合は $\mathcal{J}^*$ に入る。$\mathcal{J}^* \subset \mathcal{Y}^*$

故に勿論 $\Omega, \in \mathcal{Y}^*$ にして，μ は $\mathcal{J}^*$ に於ける一つの分布をなす。而して $\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^{\circ}) = 0$，そこで $\mathcal{Y}$ の中の closed な F を考へると，之は $\mathcal{J}^*$ に入るが，又一方 F は常に有限個の e で覆へる。

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{q} e_{\alpha(i)} \quad (\alpha(i) \text{ は } F \text{ の covering より定まる或る自然数})$$

この F に対し

$$\mu(F) = \inf \sum_{i=1}^{q} \mu(e_{\alpha(i)})$$

故に $\varepsilon > 0$ に対し

$$\mu(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{q'} \mu(e_{\alpha'(i)})$$

なる covering $F \subset \bigcup_{i=1}^{q'} e_{\alpha'(i)}$ がある。一方

$$\sum_{i=1}^{q'} \mu_n(e_{\alpha(i)}) \geq \mu_n(F)$$

故に

$$\mu(F) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{q'} \mu(e_{\alpha(i)}) = \lim_{n' \to \infty} \sum_{i=1}^{q'} \mu_{n'}(e_{\alpha'(i)}) \geq \overline{\lim_{n' \to \infty}} \mu_{n'}(F)$$

ε は任意にとれる故，之より

$$\mu(F) \geq \overline{\lim_{n \to \infty}} \mu_{n'}(F)$$

次に，open 集合 G をとると，G^c は closed，故に

$$\mu(G^c) \geq \overline{\lim_{n' \to \infty}} \mu_{n'}(G^c)$$

さて $\mu(G^c) = 1 - \mu(G)$，$\mu_{n'}(G^c) = 1 - \mu_n(G)$

なる故，上の不等式は

$$1 - \mu(G) \geq \overline{\lim} (1 - \mu_{n'}(G)) = 1 - \underline{\lim} \mu_{n'}(G)$$

となり，従って

$$\mu(G) \leq \underline{\lim} \mu_{n'}(G)$$

となる。そこで $E \in \mathcal{Y}$，$\mu(\bar{E} - E^{\circ}) = 0$ なる E をとると

$$\mu(\bar{E}) = \mu(E^\circ) = \mu(E)$$

又， $\mu_n(\bar{E}) \geq \mu_{n'}(E) \geq \mu_{n'}(E^\circ)$

さて $\mu(\bar{E}) \geq \overline{\lim}\,\mu_{n'}(\bar{E}) \geq \underline{\lim}\,\mu_{n'}(\bar{E}) \geq \overline{\lim}\,\mu_{n'}(E^\circ)$

$$\geq \underline{\lim}\,\mu_{n'}(E^\circ) \geq \mu(E^\circ)$$

故に $\lim \mu_{n'}(\bar{E}),\ \lim \mu_{n'}(E^\circ)$ が存在し

$$\lim \mu_{n'}(\bar{E}) = \lim \mu_{n'}(E^\circ) = \mu(\bar{E})$$
$$= \mu(E^\circ) = \mu(E)$$

従って

$$\lim_{n'\to\infty} \mu_{n'}(E) = \mu(E)$$ 証終り。

そこで，定理 4 の証明であるが，measure は凡て $\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ) = 0$ を満足するものとする。

さて， $\varpi(x, x')$ は有界なる故，r_μ も凡ての μ に一様に有界，そこで r を $\{r_\mu\}$ の上限とすると

$$r_{\mu_n} \longrightarrow r$$

なる distribution の列 $\{\mu_n\}$ がある。

そこで $\{\mu_n\}$ より収斂する部分列 $\{\mu_{n'}\}$ を選び出し，その極限の measure を μ_0 とすると，定理 3 により

$$r_{\mu_{n'}}(x) \to r_{\mu_0}(x) \quad \text{uniformly in } x$$

故に $\displaystyle\lim_{n'\to\infty} \left\{ \int_\Omega r_{\mu_{n'}}(x)\, d\mu_0 - \int_\Omega r_{\mu_0}(x)\, d\mu_0 \right\} = 0$

又，lemma 4 より

$$\lim_{n'\to\infty} \left\{ \int_\Omega r_{\mu_{n'}}(x)\, d\mu_{n'} - \int_\Omega r_{\mu_{n'}}(x)\, d\mu_0 \right\} = 0$$

故に $\displaystyle r = \lim_{n'\to\infty} r_{\mu_{n'}} = r_{\mu_0}$

従って この μ_0 は l. f. d であることがわかる。

之で定理４の証明は終る。

定理５．　λ を $l.f.d.$ とすると，Ω の凡ての点に於て

$$\gamma_\lambda(X) \leqq \gamma_\lambda$$

証明．　定理が成立しないとすれば，$\gamma_\lambda(X_0) > \gamma_\lambda$ なる点 X_0 がある。今 X_0 が $\gamma_\lambda(X)$ の連続点，例へば一つの Ω_i の内点とする。そうすると

$$\int_\Omega \gamma_\lambda(X)\, d\mu > \gamma_\lambda$$

となる様な μ がある。それは例へば，X_0 を含む集合 $(\in\mathfrak{F})$ に対しては１，そうでない集合に対しては０となる様な distribution を考へればよい。それは勿論 $\mu(\bar{\Omega}_i - \Omega_i^\circ) = 0$ を満足する。そこで

$$\mu_\alpha(E) = \frac{\lambda(E) + \alpha\mu(E)}{1+\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

とおくと，μ_α も一つの distribution，而して

$$\lim_{\alpha\to 0} \mu_\alpha = \lambda.$$

之は凡ての集合について成立つ。故に勿論 distribution の収斂の意味に於ても成立する。そうすると，定理３により

$$\gamma_{\mu_\alpha}(X) \to \gamma_\lambda(X) \quad uniformly\ in\ X$$

故に α を充分小さくすると

$$\int_\Omega \gamma_{\mu_\alpha}(X)\, d\mu > \gamma_\lambda.$$

となる．一方

$$\int_\Omega \gamma_{\mu_\alpha}(X)\, d\lambda = \int_\Omega \int_R W(X, \varphi_{\mu_\alpha}(t))\, p(X,t)\, dm\, d\lambda$$

$$\geq \int_\Omega \int_R W(x, \varphi_\lambda(t)) p(x,t) dm\, d\lambda$$
$$= \int_\Omega r_\lambda(x) d\lambda = r_\lambda$$

故に

$$\alpha \int_\Omega r_{\mu_\alpha}(x) d\mu + \int_\Omega r_{\mu_\alpha}(x) d\lambda > \alpha r_\lambda + r_\lambda$$

この Ω 左辺は

$$\int_\Omega r_{\mu_\alpha}(x) d(\alpha\mu + \lambda)$$

に等しい *・故に、両辺を $1+\alpha$ で割ると

$$r_{\mu_\alpha} = \int_\Omega r_{\mu_\alpha}(x) d\mu_\alpha > r_\lambda$$

を得る。之は λ が $l.f.d.$ なることに反する。

従って各 Ω_i の内点に対しては $r_\lambda(x) \leq r_\lambda$. 然るに $r_\lambda(x)$ は各 Ω_i 内で連続なる故、結局これは Ω_i の境界点に於ても成立する。 証終り。

押入

次に、任意の distribution μ に対し

*) $\mu = \mu_1 + \mu_2$ なるときは
$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2$$

$$\Omega_\mu = \{x;\ open_n\ \omega \ni x \rightarrow \int_\omega d\mu > 0\}$$

とする。

定理 6　　λ が $l.f.d.$ ならば Ω_λ の各 Ω_i の境界点を除く凡ての点に対し、$r_\lambda(x) = r_\lambda$ 。

証明　　今 Ω_λ 内の一点 x_0 に於て $r_\lambda(x_0) < r_\lambda$ となったとする。この時 x_0 がある Ω_i の内点であったとすると $r_\lambda(x)$ の Ω_i に於ける連続性により、$\omega \ni x_0$, ω; open, $\omega \subseteq \Omega_i$, 而して $x \in \omega \rightarrow r_\lambda(x) < r_\lambda - \delta\ (> r_\lambda(x_0))$ なる ω がある。さうすると

$$\int_{\omega} r_\lambda(x)\,d\lambda < r_\lambda \int_{\omega} d\lambda \quad (>0)$$

一方

$$\int_{\omega^c} r_\lambda(x)\,d\lambda \leqq r_\lambda \int_{\omega^c} d\lambda$$

故に

$$\int_{\Omega} r_\lambda(x)\,d\lambda < r_\lambda$$

之は入の假定に反する。 故に $\Omega_\lambda \frown \Omega_i^{\circ}$ $(i=1,\cdots k)$ の点に対しては $r_\lambda(x) = r_\lambda$ 　証終り。

系、 $\overline{\Omega}_\lambda = \Omega$ ならば Ω の凡ての点に於て $r_\lambda(x) = r_\lambda$ となる。

定理 7. 入, μ が l, f, d なるときは、凡ての x に対し $r_\lambda(x) = r_\mu(x)$

証明 　先づ

$$r_\lambda = r_\mu = r$$

そうすると又

$$r_\lambda = r_\mu \geq \int_{\Omega} r_\lambda(x)\,d\mu \geq \int_{\Omega} r_\mu(x)\,d\mu = r_\mu$$

故に

$$\int_{\Omega} r_\lambda(x)\,d\mu = \int_{\Omega} r_\mu(x)\,d\mu = r$$

さて、

$r_\lambda(x)$ は $\varphi_\lambda(t)$, $r_\mu(x)$ は $\varphi_\mu(t)$ によつて generate されるとすると，之等は μ に関する average risk を最小にする故，定理 2 により

$$r_\lambda(x) \geq r_\mu(\lambda)$$

証終り。

定理 8. 一つの distribution 入に関し $\underset{x}{\mathrm{Max}}\, r_\lambda(x) = r_\lambda$ ならば，入は l, f, d である。

注意　之は定理 6 の逆である 之より

$$\lambda : l, f, d \rightleftarrows r_\lambda(x) \leq r_\lambda$$

なることがわかる。

証　明　　μ を任意の distribution とすると，$r_\lambda(x) \leqq r_\lambda$ なる故

$$\int_\Omega r_\lambda(x)\,d\mu \leq r_\lambda = \int_\Omega r_\lambda(x)\,d\lambda$$

又，明かに

$$\int_\Omega r_\mu(x)\,d\mu \leq \int_\Omega r_\lambda(x)\,d\mu$$

故に

$$r_\mu = \int_\Omega r_\mu(x)\,d\mu \leq r_\lambda$$ 証終り。

定　理　9.　$\varphi(t)$ を l, f, d, λ に対する average risk を最小にする d, f とすると $\varphi(t)$ は maximum risk を最小にする。

証　明　　定理5により，$\varphi(t)$ による risk function $r(x,\varphi) = r_\lambda(x)$ は、

$$r_\lambda(x) \leqq r_\lambda = \int_\Omega r_\lambda(x)\,d\lambda$$

を満足する。　今 $\varphi^*(t)$ による $r(x,\varphi^*)$ の Max. が r_λ より小さいとする。即ち

$$\max_x r(x,\varphi^*) < r_\lambda$$

とする。そうすると

$$\int_\Omega r(x,\varphi^*)\,d\mu \leq r_\lambda - \delta < r_\lambda = \int_\Omega r(x,\varphi)\,d\mu$$

之は $\varphi(t)$ が μ に関する average risk を最小にするといふ假定に反する。故に $\varphi(t)$ は risk function の Max. の中最小のものを與へる。　証終り。

定　理　10.　risk function の Max. を最小にする d, f が存在する。

証　明.　　先づ定理4により $l, f, d,$ があ

り，定理2により之に関する average risk を最小にする d.f. があることがわかり，定理9により，この d.f. が max. risk を最小にすることがわかる。

証終り

定理 11. $\varphi(t)$ を max. risk を最小にする d.f. とし，λを l.f.d とすると，$\varphi(t)$ は λに関する average risk を最小にする。

注意：—— 之は定理9.の逆である。故に之より

$$\underset{\varphi}{Min.}\,\underset{x}{Max.}\,r(x,\varphi)=r(x,\varphi_0)\rightleftarrows\int_\Omega r(x,\varphi_0)d\lambda=r_\lambda$$

なることがわかる。

証明. 定理9により

$$\underset{x}{max.}\,r_\lambda(x)=\underset{x}{max.}\,r(x,\varphi)$$

一方

$$r_\lambda(x)\leqq r_\lambda=\int_\Omega r_\lambda(x)\,d\lambda$$

故に $r(x,\varphi)\leqq r_\lambda$ となり

$$\int_\Omega r(x,\varphi)\,d\lambda\leqq r_\lambda=\int_\Omega r_\lambda(x)d\lambda$$

$r_\lambda(x)$ はこの $\int_\Omega r(x,\varphi)d\lambda$ を最小にする d.f. により generate される故

$$\int_\Omega r(x,\varphi)\,d\lambda=r_\lambda$$

となる。従って $\varphi(t)$ も λに関する average risk を最小にする。

証終り

定理 12. $\varphi^*(t)$, $\varphi^{**}(t)$ が夫々 Max. risk を最小にする d.f. ならば，凡ての λに対し，$r(x,\varphi^*)=r(x,\varphi^{**})$

証明，前定理により，$\varphi^*(t)$, φ^{**} は夫々 λ

に関する average risk を最小にする。従つて，定理2により　$r(x,\varphi^*) \geqq r(x,\varphi^{**})$　証終り。

定理 13.　$\varphi(t)$ が max. risk を最小にする d.f. なるときは，$\varphi(t)$ は admissible である。

証明．　$\varphi(t)$ が admissible で無いとする。さうすると，$r(x,\varphi) \geqq r(x,\varphi^*)$ にして $r(x_0,\varphi) > r(x_0,\varphi^*)$ なる x_0 の存在する $\varphi^*(t)$ がある。$\varphi(t)$ は max. risk を最小にする故，$\varphi^*(t)$ も max. risk を最小にする。従つて前定理に~~より~~，$r(x,\varphi) \equiv r(x,\varphi^*)$．之は矛盾である。故に $\varphi(t)$ は admissible である。　証終り。

系．　O.d.f. は存在する。

定理 14.　λ を l.f.d. $\varphi(t)$ を max. risk を最小にする d.f. とすると，$r(x,\varphi)$ は Ω_λ に於て，Ω_i の境界点を除き，常数値 r_λ をとる。尚，$\overline{\Omega}_\lambda = \Omega$ なるときは，Ω に於て常に常数値をとる。

証明．　定理 11, 6 より明か。

5. 前節に於て O.d.f. の存在及びそれに対する risk function の性質を述べた。併し，始めに述べたやうに O.d.f. を如何にして定めるかに対する一般論は今後の研究に待つ所である。唯，その際以上述べた様な性質は一つの有力な據り所を與へることゝ思ふ。次に，Ω として，ユークリッド空間の閉集合を値域とする Parameter 以外のものの一例を述べて本講を終る

ことにする。

一例として，Rを[0,1]と支ゆするとき density が，こゝに於ける所謂 L_2 に属する様な分布函数の集合を考へこゝに於ける topology を次の様に定める：

即ち　$f_u \in L_2$ なるとき

$\mu_u(E)=\int_E f_u(x)dm$ とすると，L_2 の意味で

$f_u \to f$ なるとこ $\mu_u \to \mu$ と定める。そうするとRに対しては $m(R)=1$（m は Lebesgue measure）なる

故　$|\mu_u(E)-\mu(E)|=|\int_E(f_u(x)-f(x))dm|$.

$\leqq |\int_E(f_u(x)-f(x))^2dm)^{\frac{1}{2}}$

となり，$f_u \to f$ なるとき $\mu_u(E)\to\mu(E)$ となる。

さて，L_2 は Hilbert Space をなす故，L_2 の Compact な部分集合をとれば，* 之は3に於て述べた假定を満足する。　故に，この様な Ω に対しては，以上述べ來った議論が成立するのである。

以　上

* 下より三行目押入

density がその中に入る様な distribution の集合を Ω とすれば