第 6 號

14. Laplace-Stieltjes integral の abscissa of convergence について

所員　魚返　正

$\alpha(t)$ をすべての interval $0 \leqq t \leqq t_1$ で有界變分の複素數値を取る函數とし次の improper Stieltjes integral を考へる。

$$(1)\quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\alpha(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-st}\, d\alpha(t)$$

こゝで s は複素變數；$s = \sigma + i\tau$，この積分の收斂に關して次の定理が知られてゐる[1]

定理 1　(1)が $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ で收斂するときは $\sigma > \sigma_0$ なるすべての $s = \sigma + i\tau$ で收斂する。

この定理の結果として次の三つの場合が可能である。

(a) (1) がすべての s で収斂する。

(b) (1) がどの s に対しても発散する。

(c) (1) が $\sigma > \sigma_c$ では収斂し $\sigma < \sigma_c$ では発散する如き常数 σ_c が存在する。

(c) の場合 σ_c を abscissa of convergence とよぶ (a), (b) の場合は夫々 σ_c は $-\infty$ 或は $+\infty$ と考へる。

σ_c の決定に関しては Taylor's series の場合の Cauchy Hadamard の公式と unalogous な次の定理がある[2)]

定理 2. (1) の abscissa of convergence は それが正であるなら

$$(2) \qquad \limsup_{t \to \infty} \frac{\log|\alpha(t)|}{t} = \sigma_c$$

であたへられる。

併しこの定理では σ_c が正であるといふ假定がある。この假定なしで σ_c を求むる公式がのぞましい。こゝではそれを證明しよう。之は T. Kojima[3)] により Dirichlet's series の場合に得られた結果を含む。

定理 3. (1) の abscissa of convergence は

$$(3) \qquad \limsup_{t \to \infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(t)\right|}{t} = \sigma_c$$

---

1) D. V. Widder : A Generalisation of Dirichlet's series. T. A. M. S. Vol 31, 1929. P. 694−743

2) 1) を参照

3) Tôhoku Math Journ, 6 (1914)
又は泉信一、ディリクレ級数論 P. 33

により與へられる。こゝで$[t]$はtの最大整数部分をあらはす。$\int_{[t]}^{[t]} d\alpha(t)=0$ とす

證明　(1) が $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ で收斂すると假定すれば定理1から σ_0 より大なる任意の σ に對して (1) は收斂する。

從って　$S(t)=\int_0^t e^{-\sigma t} d\alpha(t)$　　　$S(0)=0$

と置けば $S(t)$ は有界である。: $|S(t)|\leq K$。部分積分法を利用して、

$$\int_{[t]}^{t} d\alpha(t)=\int_{[t]}^{t} e^{\sigma t} e^{-\sigma t} d\alpha(t)=S(t)\, e^{\sigma t}-S([t])\, e^{\sigma[t]}$$

$$-\sigma\int_{[t]}^{t} e^{\sigma t} S(t)\, dt$$

故に

$$\left|\int_{[t]}^{t} d\alpha(t)\right|\leq K\left(e^{\sigma t}+e^{\sigma[t]}\right)+|\sigma| K\int_{[t]}^{t} e^{\sigma t} dt,$$

$$=K\left(e^{\sigma t}+e^{\sigma[t]}\right)+K\left|e^{\sigma t}-e^{\sigma[t]}\right|$$

$$\leqq\ 2K e^{\sigma t}\qquad(\sigma\geqq 0)$$

$$\leqq\ 2K e^{\sigma[t]},\qquad(\sigma\leqq 0)$$

故に

$$\sigma_c=\limsup_{t\to\infty}\frac{\log\left|\int_{[t]}^{t} d\alpha(t)\right|}{t}\leqq\sigma.$$

σ は σ_0 より大なる任意の實數なる故

(4)　　　　$\sigma_c\leqq\sigma_0$

従って $\sigma_0<\sigma_c$ なる $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ で (1) は発散する。
次に $\sigma>\sigma_c$ なる $s=\sigma+it$ で (1) が収斂することを証明する。σ_c の定義から任意の正数 ε に対して次の如き T が存在する。

$$(5)\quad \left|\int_{[t]}^{t} d\alpha(t)\right| \leqq e^{(\sigma_c+\varepsilon)t} \qquad (t>T>0)$$

今 ε を $\sigma_c+2\varepsilon<\sigma$ なる如くとすれば定理1から (1) が $\sigma_c+2\varepsilon$ で収斂することをいへばよい
今 n を正の整数；$0\leqq\tau\leqq1$ とし

$$S_n(t)=\int_n^t d\alpha(t)\ ;\ S_n(n)=0$$

と置けば又部分積分を用ひ

$$\int_n^{n+\tau} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)=S_n(n+\tau)e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)(n+\tau)}$$
$$+(\sigma_0+2\varepsilon)\int_n^{n+\tau} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} S_n(t)\,dt$$

(5) を考慮して

$$(6)\quad \left|\int_n^{n+\tau} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right|$$
$$\leqq e^{(\sigma_0+\varepsilon)(n+\tau)}e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)(n+\tau)}+|\sigma_0+2\varepsilon|\int_n^{n+\tau} e^{-\varepsilon t}dt$$
$$\leqq e^{-\varepsilon n}(1+|\sigma_0+2\varepsilon|)=Ke^{-\varepsilon n} \qquad (K=1+|\sigma_0+2\varepsilon|)$$

今 $[t_1]=l \qquad [t_2]=l+m \quad (m>0)$ とし

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)=\int_l^{l+m}+\int_{l+m}^{t_2}-\int_l^{t_1}$$

と分ければ

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| \leq \left|\int_{l}^{t_1}\right| + \left|\int_{l+m}^{t_2}\right| + \sum_{p=0}^{m-1}\left|\int_{l+p}^{l+p+1}\right|$$

(6) を用ひ

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| \leqq K\left(e^{-\varepsilon l} + \sum_{p=0}^{m} e^{-\varepsilon(l+p)}\right)$$

$$\leqq e^{-\varepsilon l}\frac{2K}{1-e^{-\varepsilon}}$$

∴ $t_1 \to \infty$ なるとき $\int_{t_1}^{t_2} \to 0$ 即 $\int_0^{\infty} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)$

は存在する。

そで σ_c が有限の場合は定理は證明されたわけであるが上の證明から $\sigma_c = +\infty$ 或 $-\infty$ のときも明かに成立する。

15. Neumann の遊戯論覗見

林 知己夫

最近の Annals of Mathematics を覗き見て Neumann が1944年に Theory of Games と言ふ本を書いて居り其れが興味津々たるものらしいと言ふ事が解った。Annals に出てゐる Wald, Kaplansky の論文から察せられる其の主要なる数学的な問題はどうも Neumann が Zur Theorie der Gesellschaftsspiele と銘打って Mathematische Ann.