と分ければ

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| \leqq \left|\int_{\ell}^{t_1}\right| + \left|\int_{\ell+m}^{t_2}\right| + \sum_{p=0}^{m-1} \left|\int_{\ell+p}^{\ell+p+1}\right|$$

(6) を用ひ

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| \leqq K\left(e^{-\varepsilon\ell} + \sum_{p=0}^{m} e^{-\varepsilon(\ell+p)}\right)$$

$$\leqq e^{-\varepsilon\ell} \frac{2K}{1-e^{-\varepsilon}}$$

∴ $t_1 \to \infty$ なるとき

$$\int_{t_1}^{t_2} \to 0 \quad 即 \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma_0+2\varepsilon)t} d\alpha(t)$$

は存在する。

そで σ_c が有限の場合は定理は證明されたわけであるが上の證明から $\sigma_c = +\infty$ 或 $-\infty$ のときも明かに成立する。

15. Neumann の遊戯論覗見

林 知已夫

最近の Annals of Mathematics を覗き見て Neumann が1944年に Theory of Games と言ふ本を書いて居り其れが興味津々たるものらしいと言ふ事が解った。Annals に出てゐる Wald, Kaplonsky の論文から察せられる其の主要なる数学的な問題はどうも Neumann が Zur Theorie der Gesellschaftsspiele と銘打って Mathematische Ann.

alen 100 巻　1928年に発表した論文に書いて居るものに過ぎない様である。Wald, Kaplensky の論文も此の昔の論文の単なる拡張、Contribution であると思はれる。然し前記 neumann の所論は極めて面白いので Wald, Kaplensky のと共に其の一部を書き抜いてみよう。

§ 発端.

neumann は gesellschaftsspiel とは何か と言ふ事を偶然の面から議論してゐるが説くところは mises に較べて浅薄であるから此は述べない

今 $S_1, \cdots, S_n$ なる人間が居り

S_1 は $\overline{u}_1 = (u_1^1, u_2^1, \cdots, u_{m_1}^1)$

$\vdots$

S_n は $\overline{u}_n = (u_1^n, u_2^n, \cdots u_{m_n}^n)$ と言ふ夫々 $m_1, \cdots, m_n$ 種類の手段を一つの事象に対して行使し得るものと考へよう

そして $S_1, \cdots S_n$ に対して函数 $g_1(u_i^1, u_{i_2}^2, \cdots u_{i_n}^n)$, $g_n(u_{i_1}^1, \cdots u_{i_n}^n)$ が但し $g_1 + \cdots + g_n = 0$ がすべての $\overline{u}_1, \cdots \overline{u}_n$ なるベクトルの要素にたいして定められてあるものとする

そして今 S_k が $u_{i_k}^k$ なる手段を用ひ 他が夫々 $u_{i_1}^1, \cdots, u_{i_n}^n$ とは手段を用ひたとき $g_k(u_{i_1}^1, \cdots u_{i_k}^k \cdots, u_{i_n}^n)$ なる金額を受とる（>0 なら受取，<0 ならば支払）ものと考へよう．今 S_k は他の用ふる手段を全く知らぬものとする。S_k は其の事象に対してなるべく得をしたいと考へる そのためには如何なる手段を用ふべきか即ち如何なる $\overline{u}_k$ vector の要素を選ぶべきかを考へるのである。此がすべて

のたにそしてすべてのS_kについてである．さすれば此の時如何なることがおこるであらうか。

今$n=2$の時を考へよう、甲乙なる二人に就てである、さらに簡単のために$\overline{u}_{甲}=(1,2,\cdots,\Sigma_1)$ $\overline{u}_{乙}=(1,2,\cdots,\Sigma_2)$と書くことにする。甲が$i$ ($i=1,2,\cdots\Sigma_1$)なる手段を用ふることを甲がiなる標識を示すと言ふ事にする．乙についても．乙がjなる標識を示すと云ふ事にする。

($i\ j$)なる標識が示されたとき

甲は乙から$g_1(i,j)$ 乙は甲から$g_2(i,j)$なる金額をうけとる。所が$g_1+g_2=0$ したがって$g_1=-g_2$であるから甲は乙から$g(i,j)$を受けとり乙は甲から$-g(i,j)$を受取る即ち乙は甲へ$g(i,j)$を支拂ふことになる。

Gesellschaftsspiel をいとなむ以上次の様な思考が行はれるであらう。

甲は$g(i,j)$をながめ 乙がきっと此を最も少くなる様にjをきめるであらう．即ち $\mathrm{Min}_j\, g(i,j)$とするであらう。自分は得をしなければならないから此を最大にしなくてはならない 即ち$\mathrm{Max}_i\,\mathrm{Min}_j\, g(i,j)$としなくてはならないと考へる。

乙は逆に$g(i,j)$をながめ甲はきっと此を最大にきめはてするであらう。だから自分は得をするためには此を最小にしなくてはならない、$\mathrm{Min}_j\,\mathrm{Max}_i\, g(i,j)$としなくてはならないと考へる。

此の時 $\mathrm{Max}_i\,\mathrm{Min}_j\, g(i,j)=\mathrm{Min}_j\,\mathrm{Max}_i\, g(i,j)$が成立すれば面白いのであるが一般には成立しない。

例へば $\Sigma_1=\Sigma_2=2$ $g(1,1)=1$ $g(1,2)=-1$

$g(2,1)=-1$ $g(2,2)=1$

ならば Max Minj $=-1$ Minj max $=1$ となる。

今甲は $1, 2, \cdots \Sigma_1$ なる標識を夫々 $\xi_1, \cdots \xi_{\Sigma_1}$ なる確率（$\bar{\xi}=(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{\Sigma_1})$；確率ベクトル）

乙は $1, 2, \cdots 2_2$ なる標識を夫々 $\eta_1, \cdots \eta_{\Sigma_2}$ なる確率（$\bar{\eta}=(\eta_1, \cdots \eta_{\Sigma_2})$；確率ベクトル）を以て選ぶもの、と考へよう。

（当然 $\sum \xi_i = 1$ $\sum \eta_j = 1$ $\xi_i \cdots \geqq 0$ $\eta_j \cdots \geqq 0$）

此処に於て

待望値

$$h(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{i=1}^{\Sigma_1} \sum_{j=1}^{\Sigma_2} g(i,j)\xi_i \eta_j$$ を考へ

甲は $\bar{\xi}$ をいかに決めたら、乙は $\bar{\eta}$ をいかに定めたら待望値に於て一番得をするであらうかと考へるのである。

前述の $g(i,j)$ の場合と同様に此の $h(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ について考へを進めるならば

甲は $\mathrm{Max}_{\bar{\xi}}\ \mathrm{Min}_{\bar{\eta}}\ h(\bar{\xi}, \bar{\eta})$

乙は $\mathrm{Min}_{\bar{\eta}}\ \mathrm{Max}_{\bar{\xi}}\ h(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ たらしめようとしてゐることがわかる。

<u>此の時は</u> 欲する通り <u>常に</u>

$$\underline{\mathrm{Max}_{\bar{\xi}}\ \mathrm{Min}_{\bar{\eta}}\ h(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \mathrm{Min}_{\bar{\eta}}\ \mathrm{Max}_{\bar{\xi}}\ h(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = V(G)}$$

<u>が成立するのである</u>。此が Neumann の得た主要なる結果である。

§ Neumann の結果の證明。

(1) 前置き vector $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ を簡単のため ξ, η

$g(i,j)$ を $\alpha_{i,j}$ と書く事にしよう。

又 ξ, η に関しては

$$\sum^{\Sigma_1} \xi_i = 1, \quad \xi_i \geqq 0 \quad i = 1 \cdots \Sigma_1$$

$$\sum^{\Sigma_2} \eta_i = 1, \quad \eta_i \geqq 0 \quad i = 1 \cdots\cdots \Sigma_2$$

と言ふ様な條件がついてあるから甲は $\Sigma_1 - 1$ 個，乙は $\Sigma_2 - 1$ 個の標識に関してのみ自由に ξ, η の要素たる確率 ξ_i, η_i を選ぶ事が出来るにすぎない．

したがつて　$\Sigma_1 = M + 1$

$\Sigma_2 = N + 1$　とおけば甲は M，乙は N の自由度をもつことゝなる．

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} \xi_i \eta_j$$

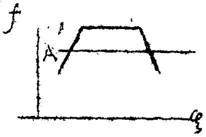
$$\xi_1 + \cdots\cdots + \xi_M + \xi_{M+1} = 1$$

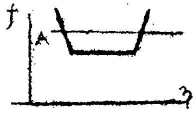
$$\eta_1 + \cdots\cdots + \eta_N + \eta_{N+1} = 1$$

ξ, η は夫々 $(\xi_1 \cdots\cdots \xi_M)$ $(\eta_1 \cdots\cdots \eta_N)$ によつて決定される　此の K について Max Min = Min Max を証明する代りに一般化して次の性質 K をもつ連続函数 $f(\xi, \eta)$ について証明してみよう。

(K)　$f(\xi', \eta) \geqq A$, $f(\xi'', \eta) \geqq A$ の時 $f(\xi, \eta) \geqq A$ が成立する、但し $\xi = \theta\xi' + (1-\theta)\xi''$ ($\xi_i = \theta\xi_i' + (1-\theta)\xi_i''$, $i = 1 \cdots\cdots M$) $0 \leqq \theta \leqq 1$

又 $f(\xi, \eta') \leqq A$, $f(\xi, \eta'') \leqq A$ の時 $f(\xi, \eta) \leqq A$ が成立する．但し $\eta = \theta\eta' + (1-\theta)\eta''$ ($\eta_j = \theta\eta_j' + (1-\theta)\eta_j''$, $j = 1, \cdots\cdots N$), $0 \leqq \theta \leqq 1$





此の條件は例へば η を固定としたとき f が ξ に関して唯一つの maximum value をとること等，ξ を固定したとき f が η に関して唯一つの minimum value をとること等を要請してあるのである。

$h(\xi,\eta)$ は明らかに ξ,η に関して linear だから (K) をもつ連続函数であり $f(\xi,\eta)$ のとくべつなものである。

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}_{\xi}\ \mathrm{min}_{\eta}\ f(\xi,\eta) = \mathrm{Min}_{\eta}\ \mathrm{max}_{\xi}\ f(\xi,\eta) \\ \text{但し}\ \xi_1 \geqq 0, \cdots \xi_M \geqq 0,\ \xi_1 + \cdots + \xi_M \leqq 1 \\ \qquad \eta_1 \geqq 0 \quad \eta_N \geqq 0,\ \eta_1 + \cdots + \eta_N \leqq 1 \end{array}\right\} \text{の条件の下に。}$$

を証明することになる 成分に分けて考へてゆくのである

$$\mathrm{Max}_{\substack{\xi_1 \geqq 0 \\ \xi_1 \leqq 1}}\ \mathrm{Max}_{\substack{\xi_2 \geqq 0 \\ \xi_1+\xi_2 \leqq 1}} \cdots \mathrm{Max}_{\substack{\xi_M \geqq 0 \\ \xi_1+\cdots+\xi_M \leqq 1}}\ \mathrm{Min}_{\substack{\eta_1 \geqq 0 \\ \eta_1 \leqq 1}} \cdots \mathrm{min}_{\substack{\eta_N \geqq 0 \\ \eta_1+\cdots+\eta_N \leqq 1}}\ f(\xi,\eta)$$

$$= \mathrm{Min}_{\substack{\eta_1 \geqq 0 \\ \eta_1 \leqq 1}}\ \mathrm{Min}_{\substack{\eta_2 \geqq 0 \\ \eta_1+\eta_2 \leqq 1}} \cdots \mathrm{Min}_{\substack{\eta_N \geqq 0 \\ \eta_1+\cdots+\eta_N \leqq 1}}\ \mathrm{Max}_{\substack{\xi_1 \geqq 0 \\ \xi_1 \leqq 1}} \cdots \mathrm{Max}_{\substack{\xi_M \geqq 0 \\ \xi_1+\cdots\xi_M \leqq 1}}\ f(\xi,\eta)$$

と書ける事に注意する

(ロ) 証明すべきものの数学的明示

今 $$M^{\xi_r} f(\xi_1, \cdots \xi_r, \eta_1 \cdots \eta_s) = \mathrm{Max}_{\substack{\xi_r \geqq 0 \\ \xi_1+\cdots+\xi_r \leqq 1}} f(\xi_1 \cdots \xi_r, \eta_1 \cdots \eta_s)$$

$$M^{\eta_s} f(\xi_1 \cdots \xi_r, \eta_1 \cdots \eta_s) = \mathrm{min}_{\substack{\eta_s \geqq 0 \\ \eta_1+\cdots+\eta_s \leqq 1}} f(\xi_1 \cdots \xi_r, \eta_1 \cdots \eta_s)$$

とおすならば証明すべき式は

$$M^{\xi_1} \cdots M^{\xi_M} M^{\eta_1} \cdots M^{\eta_N} f(\xi,\eta) = M^{\eta_1} \cdots M^{\eta_N} M^{\xi_1} \cdots M^{\xi_M} f(\xi,\eta)$$

となるのである。

此をのべるためには次の二つの事を証明すればよい

(イ) $M^{\xi_r} f$ 又 $M^{\eta_s} f$ も亦連続であり (K) をもつ

(ロ) $M^{\xi_r} M^{\eta_s} f = M^{\eta_s} M^{\xi_r} f$ が成立す

(ロ)が証明出来るならば此を順次につみ上げてゆけばよいのであるから欲する式が証明出来ることになる。

(ハ) ㊥の証明

M^{ξ_r} について考へよう（M^{η_s} についても同様）

$$M^{\xi_r}f(\xi_1,\cdots,\xi_r,\eta_1,\cdots\eta_s)=f^*(\xi_1\cdots\xi_{r-1},\eta_1,\cdots\eta_s)$$
$$=\max_{\substack{\xi_r\geqq 0\\ \xi_1+\cdots+\xi_r\leqq 1}}{}_{\xi_r}\ f(\xi_1\cdots\xi_r\ \eta_1\cdots\eta_s)$$

f が連続だから f^* の連続であることは明らかである。
次に $f^*(\xi_1'\cdots\cdots\xi_{r-1}',\eta_1\cdots\eta_s)\geqq A$，

$f^*(\xi_1''\cdots\cdots\xi_{r-1}'',\eta_1\cdots\cdots\eta_s)\geqq A$

f は連続函数であり　f^* は有界区間での f の Maximum であるから f^* はその区間中の点で attain されるのである。
此を今 ξ_r'，ξ_r'' としてみよう。

$f(\xi_1'\cdots\cdots\xi_r',\eta_1\cdots\cdots\eta_s)\geqq A$　$f(\xi_1''\cdots\xi_r'',\eta_1\cdots\eta_s)\geqq A$

かうなれば　(K) がつかへるから

$$f(\xi_1\cdots,\xi_r,\ \eta_1\cdots\cdots\eta_s)\geqq A$$

但し $\left.\begin{array}{ll}\xi_i=\theta\xi_i'+(1-\theta)\xi_i'' & i=1\cdots\cdots r\\ \eta_j=\theta\eta_j'+(1-\theta)\eta_j'' & j=1\cdots\cdots s\end{array}\right\}$

$\xi_r'\geqq 0$，$\xi_1'+\cdots\cdots+\xi_r'\leqq 1$，$\xi_r''\geqq 0$，$\xi_1''+\cdots\cdots+\xi_r''\leqq 1$ から

$\xi_1\geqq 0$，$\xi_1+\cdots\cdots+\xi_r\leqq 1$ が出る

したがって M^{ξ_r} たる f の $\max f^*$ については

当然 $f^*(\xi_1\cdots\cdots\xi_{r-1},\eta_1\cdots\cdots\eta_s)\geqq A$ が成立する

此で M^{η_s} についても同様考へられるから㊥の証明は出来た。

(ニ) ㊦の証明のための準備

$f(\xi_1\cdots\xi_r,\eta_1\cdots\eta_s)$ は　$\xi_1,\cdots\xi_{r-1}$，$\eta_1\cdots\cdots\eta_{s-1}$ を固定して考た場合には唯 ξ_r,η_s の函数としてのみ考へられる。
<u>そして言ふまでもなく連続で (K) を示してゐる</u>　したがつ

て ξ_r, η_s を再び簡略のため ξ, η とかいて

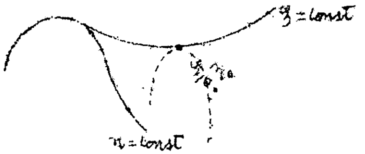
$$\max_{0\le\xi\le a}\ \min_{0\le\eta\le b} f(\xi,\eta)=\min_{0\le\eta\le b}\ \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\eta)$$

但し $\left.\begin{array}{l} a=1-\xi_1-\cdots-\xi_{r-1} \\ b=1-\eta_1-\cdots-\eta_{s-1}\end{array}\right\}$ である

を説明しようとするのである。

さて 上の式は次の様に考へられる

$f(\xi,\eta)$ は (k) を示し連続であるから



$f(\xi',\eta)\geqq A$, $f(\xi'',\eta)\geqq A$ から $f(\xi,\eta)\geqq A$ 但し $\xi'<\xi<\xi''$

$f(\xi,\eta')\leqq A$, $f(\xi,\eta'')\leqq A$ から $f(\xi,\eta)\leqq A$, 但し $\eta'<\eta<\eta''$ がわかる ξ_0,η_0 を Sattelpunkt とする ($0<\xi_0<a$, $0<\eta_0<b$)

さうすると $f(\xi_0,\eta)$ は $0<\eta<b$ に於て $\eta=\eta_0$ で minimum $f(\xi,\eta_0)$ は は $0\le\xi\le a$ に於て $\xi=\xi_0$ で maximum をとる

さて一般的に

$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta)\leqq \min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta)$ はあきらかであるから ξ_0,η_0 が Sattelpunkt と考へると。

$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta)\geqq \min_\eta f(\xi_0,\eta)=f(\xi_0,\eta_0)$

$\min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta)\leqq \max_\xi f(\xi,\eta_0)=f(\xi_0,\eta_0)$ であるから

$\max_\xi \min_\eta f(\xi,\eta)=\min_\eta \max_\xi f(\xi,\eta)=f(\xi_0,\eta_0)$

結局此の様な ξ_0,η_0 を見つければよいことになつて了つた。

(ホ) 其の証明

(i) ξ を fix する。$f(\xi,\eta)$ は $0\leqq\eta\leqq b$ のいかなる η で

minimumをとるか。

此のζの範囲はfが連続だからminimum valueを実際にattainするζの存在することから[1]閉集合であることがわかる。又fは(K)をもつから此の集合は[2]Convexである。($f(\xi,\zeta')\leqq A$, $f(\xi,\zeta'')\leqq A$から$f(\xi,\zeta)\leqq A$ 但し$\zeta'\leqq\zeta<\zeta''$より)。

したがってζ'範囲は両端を含めての区間である。しかも$0<\zeta<b$の区間の部分区間である 此を$[K'(\xi), K''(\xi)]$とする

(ii) ζをfixすれば。同様にして fをmaxにするξのとるべき範囲は閉区間$[L'(\zeta), L''(\zeta)]$となる

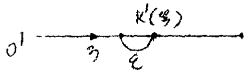
(iii) $K'(\xi)\leqq K''(\xi)$, $L'(\eta)<L''(\eta)$

そして$K'(\xi), L'(\zeta)$は下半連続函数

$K''(\xi), L''(\zeta)$は上半連続函数である

$K'(\xi)$について証明してみよう

$K'(\xi)=0$ ならば明らかであるから$K'(\xi)>0$とする



$0\leqq\zeta\leqq K'(\xi)-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) では必ず

$f(\xi\zeta)\neq \min_{\zeta} f(\xi,\zeta)$ である。

故に$f(\xi,\zeta)$は連続だから

$$f(\xi\zeta)\leqq \min_{0<\zeta<K(\xi)-\varepsilon} f(\xi,\zeta)-\delta \quad (\delta>0)$$

となしたる

したがってξに十分近くδをとれば

$$f(\delta\zeta)\leqq \min_{0<\zeta<K(\xi)-\varepsilon} f(\delta\zeta)-\frac{1}{2}\delta$$ とできる

故に$f(\delta,\zeta)$は$0\leqq\zeta\leqq K'(\xi)-\varepsilon$でminimumをとらぬ

されば こそ $K(\delta)\geqq K'(\xi)-\varepsilon$ でなくてはならない。

此は $K'(\xi)$ の下半連續なることを示してゐる。

(iv) ξ^* を固定する。

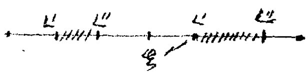
さうすると $f(\xi^*, \zeta)$ が $0 \leqq \zeta \leqq b$ に於て $\zeta = \zeta^*$ で minimum をとる様な ζ^* が存在する 次に此の ζ^* をとり $f(\xi, \zeta^*)$ が $0 \leqq \xi \leqq a$ に於て $\xi = \xi^{**}$ で maximum をとるとする

即ち $\xi^* \xrightarrow[min]{} \zeta^* \xrightarrow[max]{} {}^{**}$ の様にして ξ^{**} を考へるのである。つまり $K'(\xi^*) \leqq \zeta^* \leqq K''(\xi)$ の ζ^* に対して $L'(\zeta^*) \leqq \xi^{**} \leqq L''(\zeta^*)$ なるすべての区間の和集合を考へるのである。

今 $K'(\xi^*) \leqq \zeta^* \leqq K''(\xi^*)$ の一つの ζ^* ~~に~~ 対し $L'(\zeta^*)$ が其の minimum をとり $L''(\zeta^*)$ が maximum をとるものとする。さうすると ξ^{**} の集合は最大 最小の要素 $L'(\zeta_1^*)$, $L''(\zeta_2^*)$ をもつてゐると言へる。此の ξ^{**} の集合は最小最大の間にある各 ξ^* を含んでゐる（即ち区間をなしてゐる。）

何となれば 今もし含んでないとしてみよう。

此の時各区間 $[L'(\zeta^*), L''(\zeta^*)]$ は ξ' の全く前にあるか又は全く後にあるのである（ξ' を含むところの此の様な区間がないのである。最小 ξ^{**}，最大の ξ^{**} を含むものは夫々 ξ' の後にある区間である。）

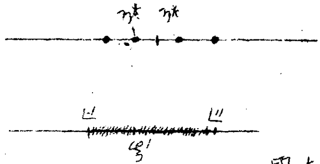


ζ^* が上記の区間を走りまはる時上に述べた様な二種類の ζ^* は共通の集積点 ζ' を必ずもつ

ζ' の十分近くでは

$L'(\zeta^*) \leqq \xi'$，乃至は $L''(\zeta^*) \leqq \xi''$ をもつ様な二種類の ζ^* が必ず存在してゐるのである。

しかも $L'(\zeta^*)$, $L''(\zeta^*)$ は各下、上半連續であるから



$\eta^* \to \eta'$ の時

$L'(\eta') \leqq \xi'$

$L''(\eta') \geqq \xi'$ でなくてはならない

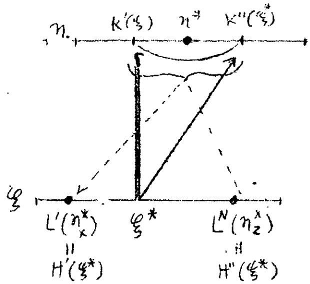
即ち、ξ' は $[L'(\eta'), L''(\eta')]$ なる一つの区間に属してゐるのである。此は矛盾である　したがって ξ^{**} の集合は一つの $[0, a]$ 間の部分区間をなしてゐるのである

此を $[H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$ とする

$$\begin{cases} H'(\xi^*) = L'(\eta_1^*) \\ H''(\xi^*) = L''(\eta_2^*) \end{cases}$$ である

(V) $\xi^* \to [K'(\xi^*) \leqq \eta^* \leqq K''(\xi^*)] \to [L'(\eta_1^*) \leqq \xi^{**} \leqq L''(\eta_2^*)]$

$= [H'(\xi^*) \leqq \xi^{**} \leqq L''(\xi^*)]$

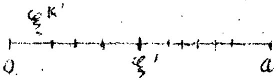


したがって $H'(\xi^*)$　$H''(\xi^*)$ は夫々とも下上半連続である

こゝで結局証明すべき最後の事は $0 \leqq \xi^* \leqq a$ なる ξ^* にして同時に ξ^{**} たるもの即ち $H'(\xi^*) \leqq \xi^* \leqq H''(\xi^*)$ なるごとき ξ^* の存在を言ふと云ふ事になるのである。此の様な ξ^* 而して其に応じて定められる η^*　此は(二)於て考へられた ξ_0, η_0 に相当するものであるからである。

(Vi) 今上の様な ξ^* がないと考へる

各区間 $[H'(\xi^*), H''(\xi^*)]$ はみな ξ^* の前又は後にあるものとする（$\xi^* = 0$ 又は $\xi^K = a$ を考へれば此の二種類あることは当然である）



ξ^* が $[0, a]$ を走りまはると上記の二種の ξ^* は共通の集積点 ξ' をもつ

(iv) と同様の議論をくりかへすと ξ' の十分近くには $H'(\xi^*) \leqq \xi^*$ 或は $H''(\xi^*) \geqq \xi^*$ をみたす様な ξ^* が必ずある。ともに $\xi^* \to \xi'$ とすれば $H'(\xi^*)$, $H''(\xi^*)$ が上、下半連続函数であるから $H'(\xi') \leqq \xi'$, $H''(\xi') \geqq \xi''$ となり ξ' は $[H'(\xi'), H''(\xi')]$ に属する

此は矛盾である故に上記の様な ξ^* が必ず存在する

此で全く証明ができたわけである。

〔註〕 ξ^* に対して η^* が一意的にきまり η^* に対して ξ^{**} が一意的にきまるとすれば ξ^* に対して ξ^{**} が一意的にきまることになる、此には max, min が常に唯一点であること連続函数 f が の様なものでないことがあれば十分である。((K) は勿論此で満足される) 此のときは Brouwer の Fixpunkt-Satz によつて $\xi^* = \xi^{**}$ が少くも一つあると言ふことが言へ結果は直に求められる。

§ $n=3$ の時の Gesellschaftsspiel についての註

此の時は甲、乙、丙　三人居る。各人が他の二人と提携することが出来る場合(組むと得をする場合)、各人が他の二人と提携しない場合(各人が他の二人と組まない(組むとかへつて損をして了ふ)が他の二人は提携すると考へる)と分けて考へをすゝめるのであるが、数学的な問題としては提携できぬ、できるで $n=2$ の場合となり、その結果を用ふるので新しいものは出てこない。考へのすゝめ方は平凡に Step by Step にやつて行くのである。

$n \geqq 4$ の時は Step by Step も困難であり組織的に結論は得られない、

§ $n=2$ の場合 gesellschaftsspiel

Max Min = Min Max $= V(G)$ とおく此は一意的に決定されるが

(イ) まづ定義をのべる

甲は $(\xi_1, \cdots, \xi_{\Sigma_1})$ なる術

乙は $(\eta_1, \cdots \eta_{\Sigma_2})$ なる術をもつと言ふ

勿論 $\begin{cases} \xi_i \geqq 0 \ \Sigma \xi_i = 1 \\ \eta_j \geqq 0 \ \Sigma \eta_j = 1 \end{cases}$ である

$$\Sigma \xi_i \alpha_{ij} \geqq V \quad (j=1, \cdots \Sigma_2)$$

$$\Sigma \eta_j \alpha_{ij} \leqq V \quad (j=1, \cdots \Sigma_1)$$

をみたす様な $(\xi_1, \cdots \xi_{\Sigma_1})$, $(\eta_1 \cdots \eta_{\Sigma_2})$ なる術を手管と名づけよう。勿論此は Unique とはかぎらない

$\xi_i > 0$ $(i=1, 2, \cdots \Sigma_1)$ の時 completely mixed と云ふ

又 甲乙のもつ夫々唯一の手管が completely mixed の時 Spiel が completely mixed と言ふ事にする

(註) Max Min = Min Max をみたす様な ξ, η の集合は明らかに手管をなして居る.

(ロ) 〔提言 1〕 甲が completely mixed の手管をもつてあるとき乙の任意の手管は $\sum_j \eta_j \alpha_{ij} = V$ $(i=1 \cdots \Sigma)$ を満足する

[証明] 今 $\Sigma \eta_j \alpha_{ij} < V$ が成立してあるとする $\Sigma \xi_i \alpha_{ij} \geqq V$ は満足されてあるから両辺に乙の手管の要素 η_j をかけ $(j=1 \cdots \Sigma_2)$ 加へ合せると (1) $\sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij} \geqq V$ となる

又 $\Sigma \eta_j \alpha_{ij} < V$, $\Sigma \eta_j \alpha_{ij} \leqq V$ $(j=2, \cdots \Sigma_2)$

であるから両辺に甲の手管の要素ξ_iをかけ加へ合せると $\sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij} < V$ となる
したがって $\xi_1 = 0$ でなくては (1) と此は両立しない 然し $\xi_1 \neq 0$ したがって $\sum \eta_j \alpha_{ij} = V$ となる 此を順次に繰せばよい

〔註〕 甲、乙がともに手管をもてば

$$\sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij} \geqq V$$

$$\sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij} \leqq V \quad \text{から}$$

$$\sum_i \sum_j \xi_1 \eta_j \alpha_{ij} = V \quad \text{となって了ふ}$$

〔揚言 2〕 $V=0$, 甲の凡ての手管は completely mixed とする
matrix (α_{ij}) の rank を r とする

(i) $r \leqq \Sigma_2 - 1$

(ii) $r > \Sigma_1 - 1$

(iii) $r = \Sigma_1 - 1$ ならば……

甲は唯一つの手管 $(\xi_1, \cdots, \xi_{\Sigma_1})$ をもち
$\sum_i \xi_i \alpha_{ij} = 0 \quad (j = 1, \cdots, \Sigma_2)$
を満足する

〔説明〕 一次聯立方程式の初等的理論より簡単に言へる

〔揚言 3〕 $\Sigma_1 > \Sigma_2$ ならば甲は completely mixed でない手管をもつ

〔揚言 4〕 $V=0$ をもつ Spiel が completely mixed であるための必要十分条件は

(i) (α_{ij}) なる matrix が Square $(\Sigma_1 = \Sigma_2)$ であり rank が $\Sigma_1 - 1$ であること

(ii) (α_{ij}) の凡ての余因数が 0 でなく同一符号をもつこと

〔説明〕 ㋑ 必要條件

(i) は〔補言2〕から出る。α_{ij} の余因数を A_{ij} とする

各 j に対し $\sum \alpha_{ij}\xi_i = 0$ から

$$\frac{\xi_1}{A_{1j}} = \cdots = \frac{\xi_{\Sigma_1}}{A_{\Sigma_1 j}}$$

凡て $\xi_i > 0$ であるから A_{ij} はみな 0 であるか又は同一符号をもつ

同様に各 i に対し A_{ij} はみな 0 であるか又は同一符号をもつ　しかし $A_{ij} = 0$ (i,j 全部) はありえない、もしそうだとすると (α_{ij}) の rank が $\Sigma_1 - 1$ より小になつてしまふからだ。

よつてすべての $A_{ij} \neq 0$ であり同一符号をもつ

㋺ 十分條件

$(A_{1j} \cdots A_{\Sigma_1 j})$ に比例して $(\xi_1, \cdots \xi_{\Sigma_1})$ をとれば

$\sum \alpha_{ij}\xi_i = 0 \ (j = 1, \cdots \Sigma_1)$ を満足する。

しかも $\xi_i > 0$, $\sum \xi_i = 1$ にえらぶことが出来る。同様に $\sum \alpha_{ij}\eta_j = 0 \ (i = 1 \cdots \Sigma_1)$ を満足し且つ $\eta_j > 0$ $\sum \eta_j = 1$ をもつ所の $(\eta_1, \cdots \eta_{\Sigma_1})$ をえらぶ事ができる。

したがって今の Spiel の Π が 0 でありAもBも completely mixed 手管をもつことは解つてあることになる。〔補言1〕によれば手管は

$\sum \alpha_{ij}\xi_i = 0$, $\sum \alpha_{ij}\eta'_j = 0$ の解でなくて

はならない、又 (α_{ij}) の rank が $\Sigma_1 - 1$ であるから解は唯一つでなくてはならない。此が上記のものである。　したがつて Spiel は completely mixed になる。

〔揚言5〕 completely mixed の Spiel (α_{ij}) の max min = min max $= V(G)$ の値は

$$V = |\alpha_{ij}| / \sum_{ij} A_{ij}$$ である。

但し A_{ij} は α_{ij} の余因数である、

分母は常に 0 でない、

〔証明〕 $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - V$ による Spiel を考へれば〔揚言4〕より直に得る、

(八) Square $(\Sigma_1 = \Sigma_2)$ の Spiel を考へよう

〔揚言5〕によつて V を求める。もし分母が 0 になるならば Spiel は completely mixed でないことになる

次に $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - V$ の Spiel を考へ〔揚言4〕をつかつて考へをすゝめる。今其の條件を満足せぬものであつても

$$\left.\begin{array}{l} \sum \alpha_{ij}\,\xi_i = V \\ \sum \alpha_{ij}\,\eta_j = V \end{array}\right\}$$ をといて ξ_i η_j を決定するのである。

ξ, η の解が得られその要素が皆正ならば completely mixed となる。

(三) 例　講究録第二巻十七号452頁に書いておいたじやんけんの例は一つの Spiel になつてゐる。

此の時 $\Sigma_1 = 3$、α_{ij}（甲が乙から受取る金額をあらはす）

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & & \text{乙} \longrightarrow & \\
 & & \text{石} & \text{紙} & \text{鉄} \\
\hline
\text{甲}\downarrow & \begin{array}{c}\text{石}\\ \text{紙}\\ \text{鉄}\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ B & 0 & -C \\ -A & C & 0 \end{pmatrix}}
\end{array}
= (\alpha_{ij}) \text{ である} \quad A\ B\ C > 0
$$

V を求むれば rank 2 であるから明らかに 0 であり、そしてすべての余因数は正である。したがって Spiel は completely mixed であり正であり、唯一つである手管を甲、乙がもつことになる。

$$
\left.\begin{aligned} \Sigma \alpha_{ij}\, \xi_i &= 0 \\ \Sigma \alpha_{ij}\, \eta_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{をとくのである。}
$$

$$
\left.\begin{aligned} -B\xi_2 - A\xi_3 &= 0 \\ -B\xi_1 + C\xi_3 &= 0 \\ A\xi_1 - C\xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned} -B\eta_2 + A\eta_3 &= 0 \\ B\eta_1 - C\eta_3 &= 0 \\ -A\eta_1 + C\eta_2 &= 0 \end{aligned}\right\}
$$

故に $\dfrac{\xi_1}{C} = \dfrac{\xi_2}{A} = \dfrac{\xi_3}{B}$ 　 $\dfrac{\eta_1}{C} = \dfrac{\eta_2}{A} = \dfrac{\eta_3}{B}$ から

$$
\begin{aligned}
\xi_1 = \eta_1 &= \frac{C}{A+B+C} \\
\xi_2 = \eta_2 &= \frac{A}{A+B+C} \quad \text{を機械的に求められる} \\
\xi_3 = \eta_3 &= \frac{B}{A+B+C}
\end{aligned}
$$

§ Wald による拡張

Wald は甲,乙の示す<u>標識が可附番個の時</u> 如何になるかを考へてゐる。

再び記号をもとへもどし

$h(\bar{\xi},\bar{\eta})=\sum_{i=1}^{\Sigma_1}\sum_{j=1}^{\Sigma_2} g(ij)\,\xi_i\eta_j$ を用ひよう（Σ_1, Σ_2 は有限又は無限）

まづ議論を進めるにあたつて $g(ij)$ は ij の函数として有界であるとする。

此のときは max min ではなく

$\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})=\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})$ なるや否やを考へるのである、

$\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ が共に可附番個の要素をもつときは必ずしも等号は成立しない、

〔例〕 ξ_i, η_j は総ての正整数をとるとする。

$$\left.\begin{array}{ll} g(ij)=1 & i>j \\ g(ij)=0 & i=j \\ g(ij)=-1 & i<j \end{array}\right\}$$ ときめる

此の時 $\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})=-1$

$\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})=-1$ となつて

等号は成立しない

① 豫備考察

〔Lemma 1〕 $\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})\leqq\mathrm{Inf}_{\bar{\eta}}\,\mathrm{Sup}_{\bar{\xi}}\,h(\bar{\xi},\bar{\eta})$ 証明は明らかである。

〔Lemma 2〕 $\lim_{u\to\infty}\bar{\xi}_u=\bar{\xi}$（各要素が近づく意味）ならば $\bar{\eta}$ に関して一様に $\lim_{u\to\infty}h(\bar{\xi}_u,\bar{\eta})=h(\bar{\xi},\bar{\eta})$（$\xi$ と η とを交換しても同様の結果を得る）

〔証明〕 i, j は 1、2、3、……なる正整数のみをとるとしてみよう かうしても一般性は失はない

假定により $A=\mathrm{Sup}\,|g(ij)|$ とおく（此が証明に利いてくる）

いかなる $\bar{\eta}=(\eta_1, \eta_2 \cdots\cdots)$ に対しても

(1) $\left|\sum_{j=1}^{\infty} g(i,j)\eta_j\right| \leqq A$

次に ξ_u に $(\xi_{u1}, \xi_{u2}, \cdots\cdots)$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots)$ とする

(1)から任意の $r>0$ に対して $\bar{\eta}$ に関して一様に

(2) $\lim_{u\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r} g(i\,j)\,\xi_{ui}\eta_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r} g(i\,j)\,\xi_i\,\eta_j$ が

成立する、又 $\sum \xi_i = 1$, $\sum \xi_{ui} = 1$ であるから

$\varepsilon > 0$ に対して

$\sum_{i=1}^{r_\varepsilon} \xi_i \geqq 1-\varepsilon$, $\sum_{i=1}^{r_\varepsilon} \xi_{ui} \geqq 1-\varepsilon$ (凡ての u について)

の様な $r_\varepsilon > 0$ が存在する

(1)からすべての η, u に対し (3)…$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r_u} g(i,j)\,\xi_{ui}\,\eta_j - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(i,j)\,\xi_{ui}\eta_j\right| \leqq \varepsilon A$ 及びすべての η に対し

(4)…… $\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r_\varepsilon} g(i\,j)\,\xi_i\,\eta_j - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(i,j)\,\xi_i\,\eta_j\right| \leqq \varepsilon A$ ε は任意に小さくえらべるから (2), (3), (4) から Lemma を得る

[Lemma 3] $\lim_{u\to\infty} \xi_u = \xi$, $\lim_{u\to\infty} \bar{\eta}_u = \bar{\eta}$ ならば $\lim_{u\to\infty} h(\xi_u, \bar{\eta}_u) = h(\xi, \bar{\eta})$ 証明は明らかである。

[定義] $\bar{\varsigma}^k$ は $\bar{\varsigma}$ の要素の中 $j>k$ に相当するものが全部 0 である様なものとする

$\bar{\varsigma} = (\varsigma_1, \varsigma_2, \cdots\cdots \varsigma_k, \varsigma_{k+1}, \varsigma_{k+2} \cdots\cdots)$

$\bar{\varsigma}_k = (\varsigma_1, \cdots\cdots \varsigma_k, 0, 0, 0 \cdots\cdots)$

[Lemma 4] $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Inf}_{\bar{\eta}_k} \operatorname{Sup}_{\xi} h(\xi, \bar{\eta}_k) = \operatorname{Inf}_{\bar{\eta}} \operatorname{Sup}_{\xi} h(\xi, \bar{\eta})$

[証明] $\operatorname{Inf}_{\bar{\eta}_k} \operatorname{Sup} h(\xi\ \bar{\eta}_k)$ は k が増大するとき単調に減少する。されば $\operatorname{Inf}_{\bar{\eta}_k} \operatorname{Sup}_{\xi} h(\xi, \bar{\eta}_k)$

の$k\to\infty$に対する極限は存在する、此をρとする、さうすると当然すべてのnに対して

(5) $\inf_{\bar\eta_k}\sup_{\xi} h(\xi,\bar\eta^k)\geqq\rho$

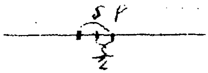
したがつて(6) $\inf_{\bar\eta}\sup_{\xi} h(\xi,\bar\eta)=\rho-\delta\ (\delta\geqq 0)$

となる

$\delta>0$とした時矛盾のおこることをのべるのである

(6)からすべてのξに対して

(7) $h(\xi,\bar\eta_0)\leqq\rho-\frac{1}{2}\delta$ の様な$\bar\eta_0$をきめる事が出来る。



$\bar\eta^k_k$ なるものを考へ $\lim_{k\to\infty}\bar\eta^k_k$ を$\bar\eta_0$とする、

[Lemma 2] によつてξについて一様に

$\lim_{k\to\infty} h(\xi,\bar\eta^k_k)=h(\xi,\bar\eta_0)\leqq\rho-\frac{1}{2}\delta$ が成立す、したがつて すべてのξに対して

$h(\xi,\bar\eta^k_k)\leqq\rho-\frac{1}{3}\delta$ の様なkが存在する

此は(5)に矛盾する

(ロ) Σ_1,Σ_2 の孰か一方が有限個の標識を持つ場合

[補言 1] 此の時は常にNeumannの場合と同様に

$$\sup_{\xi}\inf_{\bar\eta} h(\xi,\bar\eta)=\inf_{\bar\eta}\sup_{\xi} h(\xi,\bar\eta)$$

が成立する

〔証明〕 Σ_1有限とする(逆の場合は甲乙交換して考へればよい)

即ち $\Sigma_1=(1,\cdots,r)$ と

$$h(\xi,\bar\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r} g(ij)\,\xi_i\eta_j$$

Neumannの補言によれば

(8) $\sup_{\xi}\inf_{\bar\eta_k} h(\xi,\bar\eta_k)=\inf_{\bar\eta_k}\sup_{\xi} h(\xi,\bar\eta_k)$

（$\overline{\xi}$は有限個の要素よりなるべくとるであることはΣ_1が有限なることから明らか）が成立しておる。し［Lemma 4］によれば。

$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}^k} \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta}^k) = \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}} \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta})$であるから(8)の左辺に就て$k\to\infty$の極限に就て

(9) $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}^k}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta}^k) = \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta})$

が成立することを述べればよい。

此の(9)を証明するとき$\overline{\xi}$が上述の有限の仮定をつかふのである

今(9)が成立せずとして矛盾を引き出さう。やり方は［Lemma 4］の時と同様である。

(10) $\mathrm{Sup}_{\overline{\xi}} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \rho - \delta \ (\delta > 0)$とする

但し$\rho = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}^k}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta}^k)$

Σ_1は有限であるから各$k>0$に対して

(11) $\mathrm{Inf}_{\overline{\eta}^k}\, h(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}^k) = h(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}^k_k) = \mathrm{Sup}_{\overline{\xi}} \mathrm{Inf}_{\overline{\eta}^k}\, h(\overline{\xi}, \overline{\eta}^k) \ (\geqq \rho)$の様な$(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}^k_k)$をとる事が出来る。

又Σ_1は有限であるから$\{\overline{\xi}_{k'}\}$が収斂する様な部分列$\{k'\}$を$\{k\}$の中からぬき出すことが出来る。

$\lim_{k'\to\infty} \overline{\xi}_{k'} = \overline{\xi}_0$とする

(10)から　$h(\overline{\xi}_0, \overline{\eta}_0) \leqq \rho - \frac{1}{2}\delta$の様な$\overline{\eta}_0$を見つけることが出来る

次に$\{\overline{\eta}^k_0\}$を$\lim_{k\to\infty} \overline{\eta}^k_0 = \overline{\eta}_0$の様なベクトル系列とすれば$k'$の殆どすべての値に対して［Lemma 3］から

$h(\overline{\xi}_{k'}, \overline{\eta}^{k'}_0) \leqq \rho - \frac{1}{3}\delta$を得る

此は(11)に矛盾する

此を証明出来た。

（ヘ）ともに標識が可附番個の時

此の時は(9)が証明出来ない。したがって

[補言2] $\sup_{\xi}\inf_{\eta} h(\xi,\eta) = \inf_{\eta}\sup_{\xi} h(\xi,\eta)$ の成立する必要十分条件は

(12) $\lim_{k\to\infty}\sup_{\xi}\inf_{\eta_k} h(\xi,\eta_k) = \sup_{\xi}\inf_{\eta} h(\xi,\eta)$

であると云ふ事になるが(12)は機械的に(9)そのままである。見え透いてとってつけた様に見えるであらう。

§ Wald は statistical inference の問題は一つの上述 $n=2$ の場合の Spiel であると言ふ。

甲は自然で乙は統計師である。此の概要をのべてみよう。

Ω 分布函数の parameter family とし 此は parameter point θによって表現せられるとする 此のθを自然がえらぶ 此が甲の標識となる。

ω(E), Eは観測によって知り得た data 即ち Sample point。此より考へられた $H_{\omega(E)}$ なる仮定が認められる様に Sample point Eから Ωの部分集合の System S の一要素として decision-函数 ω(E)を決定するのが Statistical inference の問題である

此のω(E)が統計師の定める標識である。

次に $g(\theta, \omega(E))$ に相当するものを考へねばならない

まづ weight function $W(\theta,\omega)$ を定義する。

(1) 実数値をとり負となることはない

(2) Ωのすべての点 Sのすべての要素に対して定義されておる $W(\theta,\omega)$ の値はθが真であるとするとき ω(E) を決めること(つまり H_ω なる仮定をとること)によって犯される誤をあらはす 此はあたへられたものと考へることにする。ω(E)をきめθが真の parameter とするとき 過誤の待望値は risk とよばれる。

$$\int_M W[\theta, u(E)]\, dF(E)$$

M は Sample point の全集合

$F(E)$ は θ に correspond する E の分布函数

此の risk は θ の函数である。

$r(\theta) = \int_M W[\theta, w(E)]\, dF(E)$ 此を risk-函数とよぶ

此は Ω のすべての点 θ に対して定義された実値をもつ負とならぬ函数である 又 $r(\theta)$ の形は $u(E)$ の決定に依存する したがって此は $r[\theta | w(E)]$ とかいてよい。$w(E)$ の決定の良否は $r(\theta)$ にもとづいてなされるのである。此の $r[\theta | w(E)]$ が $g(\theta, w(E))$ と考へられるのである

自然は何れも $r[\theta | w(E)]$ か max にする積りだとは言へないが統計師は自然の手管 X ― θ を選ぶ事 ― を全く知らぬから自然は $r[\theta | w(E)]$ を max する様な θ 選ぶものだと言ふ假定を $u(E)$ 決定の理論の基礎において考へてもよいであらう。此の様に類推的に考へて Wald は更に詳しく色々述べてゐる。

〔註〕 此の Theory of Game は此れ丈をながめても拡張の餘地がいろいろの意味で十分ありことに Ξ, Γ に対する種々なる関係に於て面白い結果が得られるのではなからうか。 （統計数理研究所に於て）