(26) Riccatiの微分方程式の簡易解法に関する注意

略記

白　石　一　誠

Riccati の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=L(x)y^2+M(x)y+N(x) \qquad (1)$$

は一般には求積法(Quadrature)で解けないことはよく知られてゐることである。但し特殊の形のものは都合よく解けることを Riccati が既に示してゐる。即ち狭義の Riccati の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=ay^2+bx^m \quad (a, b, m \text{は常数}) \qquad (2)$$

に於て、(i) $a=0$　(ii) $b=0$ (iii) $m=-\frac{4k}{2k+1}$

$k=0, \pm1, \pm2, \cdots \pm\infty$) の時は解けるのである。[1]

その他一般には特殊解が分つてゐる時に一般解が簡易に求めることが大低の教科書に書かれてある。[2]
筆者は特殊解が分らない時でも(1)の式の右辺の函数がある條件を満足してゐる時は簡易解法で解けること、並に二階斉次線型微分方程式に就ても同じ條件で解けることに関して注意したいと思う。多分 Mitrinovitch あたりが書いて居るのではないかと思はれるが、知つて居られる方の御教示を仰ぎたい。

1) 例へば　吉江先生著初等常微分方程式第二篇
A、25、26　参照

(1)の方程式に　$y=Y/L(x)$　なる置換を施すと常に

$$\frac{dY}{dx}=Y^2+\left(\frac{L'(x)}{L(x)}+M(x)\right)Y+N(x) \qquad (3)$$

なる形になるので、此から先我々は次の形の方程式を取扱っても一般性を失はないのである。

$$\frac{dy}{dx}=y^2+p(x)y+q(x) \qquad (4)$$

(4)の右辺を変形して

$$y^2+p(x)y+q(x)=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} \qquad (5)$$

茲に於て　置換　$y+\frac{p}{2}=Y$　を行うと、

$$\frac{dY}{dx}=Y^2+\left(q+\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}\right)$$
$$=Y^2+f(x) \qquad (6)$$

但し　$f(x)\equiv q(x)+\frac{1}{2}\frac{dp(x)}{dx}-\frac{1}{4}(p(x))^2$
とする。 (7)

依って　$f(x)=ax^m$　$\left(\begin{array}{l} a\text{は常数} \\ m=-\frac{4k}{2k+1}, \\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm\infty \end{array}\right)$

なる時は(2)の型であるから、解けることは明かである。

2)　1)の書物或は福原博士：岩波講座数学　常微分方程式論前編第一章7　参照

猶一方(4)より

置換　$y=-\frac{u'}{u}\left(=\frac{d}{dx}\left(\log\frac{1}{u}\right)\right)$　(8)

を行うと

$$\frac{d^2u}{dx^2}-p\frac{du}{dx}+qu=0 \qquad (9)$$

なる二階斉次線型微分方程式が得られる。

又茲で標準型に直すと，即ち，

置換　$u=Ze^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$　(10)

を行うと

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\left(\frac{p'}{2}-\frac{p^2}{4}+q\right)Z=0 \qquad (11)$$

となり(7)を使うと

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+f(x)Z=0 \qquad (11')$$

となる。(4)から(11)を一度に出すには

置換　$y=-\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{p}{2}\right)$　(12)

を行へばよい。従って(6)と(11)とでは

$$Y=-\frac{Z'}{Z} \qquad (13)$$

なる置換を施せばよい。

従って次のことが云へる。

> 二階斉次線型微分方程式 $\frac{d^2u}{dx^2}-p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=0$ (9)
> と Riccati 型微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y^2+p(x)y+q(x)$ (4)
> とは簡易解法に関して同等である。例へば
> $f(x)=q(x)+\frac{1}{2}\frac{dp(x)}{dx}-\frac{1}{4}(p(x))^2=ax^m$
> $m=-\frac{4k}{2k+1}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm\infty$ ならば解ける。

二階斉次線型微分方程式の標準型

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+f(x)Z=0 \qquad (11')$$

に於て、 $f(x)=ax^m$ $\left(m=-\frac{4k}{2k+1},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm\infty\right)$

のとき 簡易解法で解ける。即ち

$$\frac{dY}{dx}=Y^2+f(x) \qquad (6)$$

の一般解を $Y(x,C_1)$ とすれば

$$Z=C_2e^{-\int Y(x,C_1)dx}$$

が求むる一般解である。

此の條件の m に関して一言注意して置かう。

m として取り得る値は

$$m=\begin{cases} 0,\ -2,\ -4 & \text{(整数値)} \\ -\frac{4}{3},\ -\frac{8}{5},\ -\frac{12}{7},\cdots\cdots \to -2 & \text{(単調減少数列)} \\ -\frac{8}{3},\ -\frac{12}{5},\ -\frac{16}{7},\cdots\cdots \to -2 & \text{(単調増加数列)} \end{cases}$$

此の三種のものである。故に $f(x)$ としては

a(常数), $\frac{a}{x^2}$, $\frac{a}{x^4}$,

$a/x^{\frac{4}{3}}$, $a/x^{\frac{8}{5}}$, ...

$a/x^{\frac{8}{3}}$, $a/x^{\frac{12}{5}}$ ......

等となる。

例1. $\frac{d^2Z}{dx^2}+aZ=0$ ①, $\frac{dY}{dx}=Y^2+a$ ②

此はよく知られてゐる物理等に出て来る式である。

①から直接出すと

(i) $a>0$ のとき，　$a=\alpha^2$ と置くと

$$Z=C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x$$

(ii) $a<0$ のとき，　$-a=\beta^2$ と置くと

$$Z=C_1e^{\beta x}+C_2e^{-\beta x}$$

(iii) $a=0$ のとき，

$$Z=C_1x+C_2$$

となるが，②から上述の方法により出すと，

(i) $\dfrac{dY}{dx}=Y^2+\alpha^2$，　$\dfrac{dY}{Y^2+\alpha^2}=dx$ より

$$Y=\alpha\tan[\alpha(x+C_1')]$$

$$Z=C_2'e^{-\alpha\int\tan[\alpha(x+C_1')]dx}$$

(C_1', C_2' は常数)

$$=C_2'\cos(\alpha x+\alpha C_1')$$ (常数を換へると)

$$=C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x$$

(ii) $\dfrac{dY}{dx}=Y^2-\beta^2$，　$\dfrac{dY}{Y^2-\beta^2}=dx$ より

$$Y=\beta\frac{e^{-\beta x}+C_1'e^{\beta x}}{e^{-\beta x}-C_1'e^{\beta x}}$$

$$\therefore\ Z=C_2'e^{-\int Ydx}$$

$$=C_2'e^{\log|e^{-\beta x}-C_1'e^{\beta x}|}$$

$$=C_1e^{\beta x}+C_2e^{-\beta x}$$

(iii) $\dfrac{dY}{dx}=Y^2$，　$\dfrac{dY}{Y^2}=dx$ より

$$Y=-\frac{1}{x+C_1}$$

$$\therefore \quad Z = c_2' e^{\int \frac{dx}{x+c_1'}} = c_2' e^{\log(x+c_1')}$$

$$= c_1 x + c_2 .$$

例2. $\dfrac{d^2 Z}{dx^2} + \dfrac{1}{x^4} Z = 0$

先づ $\dfrac{dY}{dx} = Y^2 + \dfrac{1}{x^4}$ を解く. $Y = \dfrac{1}{x^2}\varphi - \dfrac{1}{x}$ とおく.

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi^2+1}{x^2} \quad \text{此より} \quad \tan^{-1}\varphi = -\frac{1}{x} + C_1$$

依って $Y = \dfrac{1}{x^2}\tan\left(C_1 - \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$

$$\therefore \quad Z = C_2 e^{-\int\left[\frac{1}{x^2}\tan\left(C_1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]dx}$$

$$= C_2 x \sin\left(C_1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= C_1' x \sin\frac{1}{x} + C_2' x \cos\frac{1}{x} .$$

Riccati の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + p(x)y + q(x) \qquad (4)$$

は次の場合簡易解法に依って解ける.

i) $p(x), q(x)$ 二つ共常数のとき

ii) $y^2 + p(x)y + q(x) = (y-k)(y+q(x))$ となるとき

iii) $f(x) \equiv q(x) + \frac{1}{2}p'(x) - \frac{(p(x))^2}{4} = ax^m$ となるとき

但し $m = \dfrac{-4k}{2k+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots \pm\infty$ とする.

何故なれば

i) のときは変数分離型になって明白

ii) のとき $y_1 \equiv K$ (常数) が一つの特殊解なることが分るから、

$y = K + \eta(x)$ と置くと

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta^2 + \eta\,(K + g(x))$$

となって *Bernoulli* 型の微分方程式となり解ける、

(iii) 上述より明らかである。

次に

$f(x) \equiv ax^m$ を満足する簡単な *Riccati* の微分方程式を作って見ると

(A) 先づ $p(x)$ を定めて次に $q(x)$ を出す。以下例は上の條件を満足してゐるとする。

① $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2x^n y + (x^{2n} - nx^{n-1} + ax^m)$

(n は任意の実数)

② $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + \sin x \cdot y + \left(ax^m + \frac{1}{2} - \cos^4\frac{x}{2}\right)$

③ $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2\log x \cdot y + \left\{ax^m + (\log x)^2 - \frac{1}{x}\right\}$

④ $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2\tan x \cdot y + (ax^m - 1)$

⑤ $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x}y + ax^m$ 〃 等々

(B) 先づ $q(x)$ を定めて次に $p(x)$ を求めるなら

ば、やはり *Riccati* の微分方程式を解くことになる。 例へば

$$f(x) \equiv a x^m, \qquad g(x) = b x^m$$

とすると

$$x \frac{dp}{dx} = p^2 + 4(a-b) x^m$$

を解くこととなる。

$m=0$, $a-b=-c^2$ とすると一解 $p = -2\coth(cx)$ が求まる。

依つて $$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2\coth(cx)\, y + b$$

を得る。

以上、

(1947.8.19.)

註 1)

(A) ⑤の方程式の特別の場合

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x} y + a$$ に於て

$a = \alpha^2$ として $\frac{y}{\alpha}$ を y と置換へると次の形となる。

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y^2 - \frac{2}{x} y + \alpha$$

此が Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 1938, 48 Band. に問題として出されてゐたことと記憶してゐる。