が即ち特定人$X_1 \cdots\cdots X_r$が当選する場合の優劣度の総和の平均なり。此値が大なる程選挙方法が優秀なり
蓋し同一方法の選挙を繰返すとき選び得る人の價値の總和が平均に於て大なればなり

此方針に從て差当り次の三つの選挙法の優劣を比較し度き熱望を有す　即ち

n人の選挙者がm人の候補者中よりr人を選抜するに当り次の三方法を考ふ

第一法　單記投票を行ひ得票の最高点より順次r人を取りて當選者となす

第二法　r人宛の連記投票を行ひて最高点より順次r人を取る

第三法・先づ單記にて最高点者を取り殘りの$m-1$人中より再び單記にて最高点者を取り進で同樣にしてr回の單記投票を繰返してr人を選定す

此三法に対して優劣の判定を行ひ度きなり

2、制限連記投票

1

最近選挙法の改正に伴ひ制限連記投票を採用すべきこと決定され殘る所は只連記人数の問題なりと聞く

一選挙区内の選挙人の数m、候補者の数n、当選すべき人数kに対し連記すべき人数hを如何に定むることが民意を最能く反映すべきかの問題なり

此問題を合理的に解決せんには数学的なる考察特に確率的計算を必要とすべきは何人の眼にも明瞭なるこ

とならん　之に関する数理的解決法にも見界の如何によりて種々の道あるべき筈なり予の茲に示す所は其一つの方針による一つの結果なり　他の方針による他の結果を数多く見出し其最も妥当なるものを結論し得れば幸甚なり

2

此問題に於て基礎となるべき見界は「民意」なるものの性質を如何に観察するかと云ふ点にあり　予は假りに民意は大衆個々によりて頗る自由に異なり得るものとし第一人の意向が斯々なる以上は同じ國民たる第二第三の人の意向も亦それに近かるべしと豫想さるゝ如き類似性を全然認めざることゝす　之が実際上の妥当性に関して最も疑義を生ずる所なり

其他民意を量的に取扱ふ上に於て数多の假定を必要とすれども、それ等は尺度を適当に取ることによりて許容し得べき假定にして茲に豫め特記する程の必要を認めず　常識的に断りなく随所に假定を導入することとなさん

3

選挙人を A_1、A_2 …… A_m、被選挙人を B_1 B_2 …… B_n とす。一選挙人 A が一被選挙人 B に対して持つ人物評價の値即ち信頼度を量的に測定する一法ありとし之によれば信頼度は $(0, 1)$ なる区間の上に在りて而も一様に実らしき状態に於て配布さるゝものとす

今特定の一選挙人 A が被選挙人 B_1 B_2 …… B_n の夫々

に対して持つ信頼度を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n \tag{1}$$

にて表はさん、

Aが連記投票を行ひて被選挙人中のK人を連記する時、其中に例へばB_1が記入さるゝことはx_1がn数(1)の中にて大さの順に於て第1位乃至第K位にあることなり、而してx_1がn数中の第何位にあるかは事前確率が同一なるが故に前述の如くB_1が記入さるゝことの確率は

$$\frac{K}{n} \tag{2}$$

次にx_1は区間$(x,\ x+dx)$上にあるものとし其場合にx_1が第l位にあることは$x_2\cdots x_n$中の或$l-1$個がxより大きく他の$n-l$個がxより小なることなり従て其確率は

$$_{n-1}C_{l-1}\, x^{n-l}(1-x)^{l-1} \tag{3}$$

なること明らかなり、従つて此場合dxが起りて而もB_1が記入さるゝ確率は

$$\sum_{l=1}^{K} {}_{n-1}C_{l-1}\, x^{n-l}(1-x)^{n-l}dx \tag{4}$$

部分積分によりて知らるゝ如く

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{1}{(p+q+1)\,{}_{p+q}C_q} \tag{5}$$

なるが故に式(4)を$[0,1]$間にて積分せるものは$\frac{K}{n}$なり それは即ちx_1の任意の値に対してB_1が記入さるゝ確率にして式(2)に於て既に知れる所のものと一致す

るなり

然に於て事後確率の定理によればB_1が記入されたる場合に於てx_1が区間$(x, x+dx)$上にありしことの確率は(4)と(2)との比即ち

$$ {}_{n-1}C_{l-1}\,\frac{n}{K}\sum_{l=1}^{K} {}_{n-1}C_{l-1}\, x^{n-l}(1-x)^{l-1}dx \qquad (6)$$

従てB_1が記入されたる時のx_1の待望値は(6)にxを乗じて積分せるもの即ち

$$\frac{n}{K}\int_0^1\sum_{l=1}^{K} {}_{n-1}C_{l-1}\, x^{n-l+1}(1-x)^{l-1}dx$$

$$=\frac{n}{K}\sum_{l=1}^{K} {}_{n-1}C_{l-1}\,\frac{1}{(n+1)\,{}_{n}C_{l-1}}$$

$$=\frac{n}{K}\sum_{l=1}^{K}\frac{n-l+1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2n-K+1}{n+1} \qquad (7)$$

次にB_1が記入せられざる確率は(2)と同理によりて

$$\frac{n-K}{n} \qquad (8)$$

又x_1が$(x, x+dx)$上にありて而も記入せられざる確率はx_1が第$K+1$位以下にある確率即ち

$$\sum_{l=K+1}^{n} {}_{n-1}C_{l-1}\, x^{n-l}(1-x)^{n-l}dx \qquad (9)$$

故にB_1が記入せられざる場合に於てx_1が$(x, x+dx)$

上にありしことの確率は (9) と (8) との比即ち

$$\frac{n}{n-K}\sum_{\ell=K+1}^{n} {}_{n-1}C_{\ell-1}x^{n-\ell}(1-x)^{\ell-1}dx \qquad (10)$$

従てB_1が記入せられざる場合のx_1の待望値は (10) にxを乗じて積分せるもの即ち

$$\frac{n}{n-K}\int_0^1\sum_{\ell=K+1}^{n} {}_{n-1}C_{\ell-1}x^{n-\ell+1}(1-x)^{\ell-1}dx$$

$$=\frac{n}{n-K}\sum_{\ell=K+1}^{n}\frac{n-\ell+1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{n-K+1}{n+1} \qquad (11)$$

以上は一選挙人Aの投票の結果よりしてB_1に対する信頼度の待望値を推論せるものなるが他のB_2, B_3等に就ても勿論同様なり従て此連記投票に於て或一被選挙人BがS票を獲得したりとせば其Bは選挙総員中のS人よりは夫々 (7) 残る$m-S$人よりは夫々 (11) に相当する信頼を受けたるものと見られ結局Bが全員より受くる信頼度の総和の待望値は

$$\frac{1}{2}\ \frac{2n-K+1}{n+1}S+\frac{1}{2}\ \frac{n-k+1}{n+1}(m-S)$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{n}{n+1}S+\frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{n+1}\right)m \qquad (12)$$

なり

4

今合格者n人をB_1 B_2 …… B_nとし得票を夫々$S_1 \geq S_2$

$\cdots\cdots \geqq S_h$ とし其和を t とす即ち

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_h=t \tag{13}$$

之等の各 B に対して公式 (12) を作り其等の和を作れば、

$$\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}t+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)mh \tag{14}$$

此 t は確定数にあらず　S_i の待望値を σ_i，t の待望値を τ とすれば

$$\sigma_1+\sigma_2\cdots\cdots+\sigma_h=\tau \tag{14}$$

τ を (14) に代入すれば

$$E=\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\tau+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)mh \tag{15}$$

之が即ち此選挙法によりて選ばれたる h 人が全体として選挙人より受くべき信頼度の待望値にして之の大小によりて民意の反映の程度を測ること妥当なりと考へらる

σ_i 従て τ を求むることは組合論に属する困難なる問題の解決を必要とす　公式的に結果を導くことは不可能なり

m が十分大なるときは各被選挙人の得票は比例的に殆ど等しくなり何れも総票の $\frac{1}{n}$ 即ち $\frac{mk}{n}$ に近かるべきは明かなり　即ち又 τ は $\frac{mkh}{n}$ に近し

$$\tau-\frac{mkh}{n}=\bar{\tau} \tag{16}$$

とすれば式 (15) は変じて

$$E=\frac{mh}{2}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\bar{\tau} \tag{17}$$

此 $\bar{\tau}=\bar{\tau}(m,n,h,k)$ の函数形を求むる事が困難と

なるなり

m, n, k は定数なるが故に如何なるKに対してρが最大となるかを実験的にてもよし、簡単に知り得ればば、其れにて問題は完全に解決したるなり

注意すべきは実際の場合に於てmは十分大なるに拘らずS_1 S_2 等は平均値$\frac{mk}{n}$に近からず首席と末席にては雲泥の差を生ずる事普通なり 之実は所謂選挙運動其他被選挙人各個の故意的動作に帰因するものにして真の民心反映度にはあらず、民心反映の優劣はあくまで上述の所論にて決定すべきなり、

5 mを十分大なりとしてα_iの

α_iの待望値を厳正に求むる事は頗る困難なれども近似値を求むべき一理論を示さん勿論其れも実際計算に当りては相当困難なる式を生ず

先づ$K=1$ 即単記投票の場合に就て述べん 此場合が最も重要なり

例へばB_1が第ℓ位の票数を得たりとす而も其票数S_1は$(z, z+dz)$なる区間にありとす但し此区間は実際は整数の区間なり換言すれば残りの$S_2 \cdots\cdots S_n$の中の或$\ell-1$個はz以上にして他の$n-\ell$個はz以下なることなり 其一つの場合として例へば

$$S_2 \quad S_3 \cdots\cdots S_\ell \geqq z \qquad (18)$$
$$S_{\ell+1} \quad S_{\ell+2} \cdots\cdots S_n \leqq z$$

なるものとす

先づB_1がm人の各によりて或は投票され或はせられざることをm回の試行と見れば投票さるゝ確率は$\frac{1}{n}$なるが故に投票總数S_1が

$$z \leqq S_1 \leqq z+dz \tag{19}$$

なるべき確率はLaplaceの定理によれば近似的に

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}}e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}}dz \tag{20}$$

次にB_1へ投じたる人は除き残りの約$m(1-\frac{1}{n})$人がB_2……B_nへ投ずる場合特にB_2への投票を観察すれば毎回の投票確率は$\frac{1}{n-1}$なるが故に

$$z \leqq S_2 \leqq z+dz \tag{21}$$

なる確率は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}}e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}}dz$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\pi m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}}e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}}dz. \tag{22}$$

次に更に此B_1, B_2へ投じたる人を除きたる残りの約$m(1-\frac{2}{n})$人に就て観察すれば毎回B_3へ投ずる確率が$\frac{1}{n-2}$となり

$$z \leqq S_3 \leqq z+dz \tag{23}$$

なるべき確率は同様にして

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)}}e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)}}dz \tag{24}$$

となる　追て同様にして最後に

$$z \leqq S_{n-1} \leqq z+dz \tag{25}$$

なるべき確率は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} dz \tag{26}$$

となる

S_n は定数にして

$$S_n = m-(S_1 + \cdots\cdots + S_{n-1}) \tag{27}$$

なりと考へて可なり

故に条件 (19) と (18) との同時に起る確率は近似的に言へば (20) と (22), (24) 等の適当なる範囲内の積分との連乗積なり即ち

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi m\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)}} e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}} dz$$

$$\times\int e^{-\frac{z^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)}}dz\int e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)}}dz$$

$$\cdots\cdots\int e^{-\frac{\left(z-\frac{m}{n}\right)^2}{2m\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}dz \tag{28}$$

なり但し $S_2\ S_3 \cdots\cdots S_{n-1}$ 及び (27) の S_n が共に (18) なる條件を受くるなり

(28) に z を乗じて積分せるものが即ち此場合の待望値なり但し z より大なる $l-1$ 個の S が $S_2 \cdots S_n$ 中の何々なるかによりて異なる場合を生ず　従て第 l 位の票の待望値と云へば上述積分に ${}_{n-1}C_{l-1}$ を乗じたる

ものなり

故に結論として第$l-1$位の票数の待望値は次の式にて表はさる

$$\frac{{}_{n-1}C_{l-1}}{\left(\sqrt{2\pi\frac{m}{n}}\right)^{n-1}\sqrt{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n-1})\cdots(1-\frac{1}{2})}}\int\cdots\iint z_1 e^{-\left\{\frac{(z_1-\frac{m}{n})^2}{2n\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})}+\frac{(z_2-\frac{m}{n})^2}{2m\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n-1})}+\cdots+\frac{(z_{n-1}-\frac{m}{n})^2}{2m\frac{1}{n}(1-\frac{1}{2})}\right\}}dz_1\,dz_2\cdots dz_{n-1} \qquad (29)$$

而して積分の範囲は

$$\left.\begin{aligned} &+\infty > z_2\ z_3 \cdots\cdots z_l \geqq z_1 \geqq 0\\ &0 \leqq z_{l+1}\ z_{l+2} \cdots\cdots z_{n-1} \leqq z_1 < +\infty\\ \text{且つ}\quad &0 \leqq m-(z_1+\cdots\cdots z_{n-1}) \leqq z_1 < +\infty \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

なるものとす

以上の豫備知識あらば一般のKに対しても論は容易なり此場合は只条件(30)が複雑なる形を有する迄なり

K人を連記する仕方の総数は${}_nC_K=\nu$個あり各仕方を夫々$C_1, C_2 \cdots\cdots C_\nu$と命ず$C_i$の起る回数を$P_i$とす

例へばC_iの中にてB_1を含むものは総数${}_{n-1}C_{K-1}=\mu$個なり　之を$C_1\ C_2 \cdots\cdots C_\mu$とすれば

$$S_1 = P_1 + P_2 + \cdots\cdots + P_\mu \qquad (31)$$

なるべし。S_2, S_3等に就ても同様なり一般に

$$S_i = L_i(P) \qquad (32)$$

の如く略記すべし

此場合理論は前と同様にして只前のn, Sの所へν, Pが代入さるゝ迄なり　具体的に言へば

$$\alpha_l \doteqdot \frac{{}_{\nu-1}C_{l-1}}{\left(\sqrt{2\pi \frac{m}{\nu}}\right)^{\nu-1}\sqrt{(1-\frac{1}{\nu})(1-\frac{1}{\nu-1})\cdots(1-\frac{1}{2})}}\int\cdots\iint(z_1+z_2+\cdots+z_{\nu})\times$$

$$\times e^{-\left\{\frac{(z_1-\frac{m}{\nu})^2}{2m\frac{1}{\nu}(1-\frac{1}{\nu})}+\cdots+\frac{(z_{\nu-1}-\frac{m}{\nu})^2}{2m\frac{1}{\nu}(1-\frac{1}{2})}\right\}}dz_1\,dz_2\cdots\cdots dz_{\nu} \qquad (33)$$

の積分範囲として

$$\left.\begin{array}{l} +\infty > L_2(z),\ L_3(z)\ \cdots\cdots\ L_l(z) \geqq L_1(z) \\ L_{l+1}(z),\ \cdots\cdots\ L_{n-1}(z) \leqq L_1(z) \\ Km-\{L_1(z)+L_2(z)+\cdots\cdots+L_{n-1}(z)\} \leqq L_1(z) \\ 0 \leqq z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots\ z_{\nu-1} \end{array}\right\} \qquad (34)$$

を取れば可なり　之即求むる α_l なる待望値の近似値なり

以上は理論上の事実なり　之を実際に計算する事は蓋し相当の困難事ならん　他日に譲るべし、

3. 輸送問題

§1 輸送力

鉄道網によって数多の都市(駅)が連結されたる全群を一国とす

A市よりB市に停車すること無く進行する列車をAよりBに直結する列車と呼び、$A\to B$と記す　斯かる線路が数本ありてもそれは一本と考へて論じ得べく又単位期間(例へば一日、又は一ヶ月の如し)に数列車が進行しても一つの列車と考へて宜し、斯く簡単化したるものを$A\to B$となす

列車による国内の物の輸送を論ずるに当り先づ既に輸