$$\Phi(D) = (\mu^*, \mu^*)$$

之と定理1とから目的の定理を得る即ち

定理2: 有界閉集合が Φ-Capacity positive なるための必要且十分條件は Φ-Diameter positive なることなり 従って1°で述べたことから

定理3、有界閉集合EのΦ-Capacity が0なるときは potential がE上では+∞他では有限であるEの上の distribution が存在する。

9. Mean Concentration Function と Typical Function VI

所員 國澤清典

(1)

W. Feller によれば、次の定理が知られている。

定理4.2.3. どんな $\eta > 0$ に対しても、

(4.2.1) $$P_r\left\{\left|\frac{1}{A_n}\sum_{m=1}^{m_n}\left(X_{nm}-\int_{-A_n}^{A_n} x\, dF_{nm}(x)\right)\right| \geq \eta\right\} \to 0,$$

$(n \to \infty)$ を満足する $\{A_n > 0;\ n = 1, 2, \cdots\}$ の存在するための十分條件は

(4.2.5) $$\sum_{m=1}^{m_n}\int_{|x|>A_n} dF_{nm}(x) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty)$$

且つ

(4.2.6) $$\sum_{m=1}^{m_n}\frac{1}{A_n^2}\int_{|x|<A_n} x^2\, dF_{nm}(x) \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty)$$

であり、若し

$F_{nm}(+0) \geq \lambda > 0,\ F_{nm}(-0) \leq 1-\lambda,\ m = 1, 2, \cdots, m_n;\ n = 1, 2, \cdots$

が満足されているならば、(4.2.5) と (4.2.6) は (4.2.1)

が成立するための必要且十分な條件である。

この定理は定理4.2.1に含まれている、明らかにFeller の條件(4.2.5),(4.2.6)と吾々の條件(4.2.3)とは同等である。こゝでは(4.2.1)と(4.2.7)より(4.2.2)の出る事を証明せう。

事実 定理4.2.1よりどんな$\eta>0$に対しても

$$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\psi_{F_{nm}}(\eta A_n)\right\}\geq\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m_n}P_r\left\{|\overset{\vee}{X}_{nm}|\geq\eta A_n\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

が成立する。こゝに$\overset{\vee}{X}_{nm}=X_{nm}-\tilde{X}_{nm}$であり$X_{nm}$と$\tilde{X}_{nm}$とは互に独立な確率変数であり、先に分布函数$F_{nm}(x)$をもっている。ところで

$$\sum_{m=1}^{m_n}P_r\left\{|\overset{\vee}{X}_{nm}|\geq\eta A_n\right\}=\sum_{m=1}^{m_n}P_r\left\{|X_{nm}-\tilde{X}_{nm}|\geq\eta A_n\right\}=$$

$$\sum_{m=1}^{m_n}\Big[P_r\left\{(X_{nm}-\tilde{X}_{nm}\geq\eta A_n)_n(\tilde{X}_{nm}\leq 0)\right\}+P_r\left\{X_{nm}-\tilde{X}_{nm}\leqq-\eta A_n)\right.$$

$$\left.{}_n(\tilde{X}_{nm}\geq 0)\right\}\Big]\geq\sum_{m=1}^{m_n}\Big[P_r\left\{(X_{nm}\geq\eta A_n)_n(\tilde{X}_{nm}\leq 0)\right\}$$

$$+P_r\left\{(X_{nm}\leq-\eta A_n)_n(\tilde{X}_{nm}\geq 0)\right\}\Big]$$

$$\geq\lambda\sum_{m=1}^{m_n}P_r\left\{|X_{nm}|\geq\eta A_n\right\}\geq\lambda P_r\left\{|X_{nm}|\geq\eta A_n\right\},$$

これより(4.2.)が得られる。

次に(2.1.1)により定義された$\|X_{nm}\|$が正の確率変数のsystemとする。この時、$S_n=\sum_{m=1}^{m_n}X_{nm}$が<u>relatively stable</u>と云ふのは$\{A_n>0\}$が存在して

---

(1) W. Feller, Über das Gesetz der grössen Zahlen. Acta Szeged, 8, pp 191-201, 1937

(4.2.8) $P_r\left\{\left|\frac{S_n}{A_n}-1\right|>\eta\right\}\to 0,\ (n\to\infty)$ がとんな $\eta>0$ に対しても成立する事である。

A. Khintchine によれば $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ がことごとく同じ分布をもつ場合，$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ の relatively stable なるための必要且十分の條件を示した。ところが Feller は Khintchine の條件は (4.2.5) と (4.2.6) より得らる事を後に示した、最近 A. Bolroff[1] がこの問題を拡張して $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ の relatively stable なるための條件をあたつた Bobroff の場合は $X_1, X_2, X_3, \cdots$ は正の独立確率変数であるが必ずしも同じ分布をもたない場合である、こゝで Bobroff の條件は容易に吾々の條件(4.2.3)より得られる事を示そう、今 $X_1, X_2 \cdots$ の代りに $\| X_{nm} \|$ の形で Bobroff の定理を述べると、

定理 4.2.4[2] $S_n=\sum X_{nm}$ が relatively stable であり どんな $\eta>0$ に対しても $P_r\{X_{nm}>\eta A_n\}\to 0\ (n\to\infty)$ が $1\leq m\leq m_n$ に対して一様に成立するための必要且十分な條件は正数列 $\{c_n>0 / n=1,2,\cdots\}$ が存在して

$$(4.2.9)\quad \sum_{m=1}^{m_n}\{1-F_{nm}(c_n)\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad \sum_{m=1}^{m_n}\frac{1}{c_n}\int_0^{c_n}(1-F_{nm}(x))\,dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

が満されてゐる事である。

(4.2.9) は次の條件で置きかへられる。

---

(1) A. Bobroff, Über relative Stabilität von Summen positive zufälliger Grösson (Russian). Uchenye Zapiski Moskov, Gos. Univ., pp 191—202, 1939.

(2) 最近、河田所員により全継則の見地より巧妙な証明があたへられた、又筆者も別証をあたへた、いづれも未発表.

$$(4.2.10)\quad \sum_{m=1}^{m_n}\{1-F_{nm}(c_n)\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad \sum_{m=1}^{m_n}\frac{1}{c_n}\int_0^{c_n}(1-F_{nm}(x))\,dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

事実　部分積分により、

$$\sum_{m=1}^{m_n}\frac{1}{c_n}\int_0^{c_n}(1-F_{nm}(x))\,dx=\sum_{m=1}^{m_n}\left\{(1-F_{nm}(c_n))+\frac{1}{c_n}\int_0^{c_n}x\,dF_{nm}(x)\right\}.$$

この等式は(4.2.9)と(4.2.10)の同等な事を云っている。

さて $S_n=\sum_{n=1}^{m_n}X_{nm}$ の relative stability は(4.2.1)の特別の場合である事を示そう。

$$\frac{1}{A}\sum_{m=1}^{m_n}\int_0^{A_n}x\,dF_{nm}(x)=1+o(1)\quad(n\to\infty)$$

を満足する $\{A_n>0\,/\,n=1,2,\cdots\}$ の存在するから(4.2.3)は(4.2.11)と一緒にして(4.2.10)と同等である事を示せば十分である。事実(4.2.3)よりどんな $\eta>0$ に対しても

$$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\phi_{F_{nm}}(\eta A_n)\right\}\geq\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-F_{nm}(\eta A_n)\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

が成立する事が出てくるから、$\{\eta_n>0\,/\,n=1,2,\cdots\}$ が存在して

$$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-F_{nm}(\eta_n A_n)\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

且つ $\eta_n\to0\quad(n\to\infty)$

そこで

$$\frac{1}{\eta_n A_n}\sum_{m=1}^{m_n}\int_0^{\eta_n A_n}x\,dF_{nm}(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

が成立する、何とならば若しそうでないとすれば、$\{n_i\,/\,i=1,2,\cdots\}$ と常数Mが存在して

$$M\geq\frac{1}{\eta_{n_i}A_{n_i}}\sum_{m=1}^{m_{n_i}}\int_0^{\eta_{n_i}A_{n_i}}x\,dF_{n_i m}(x),\quad i=1,2,\cdots$$

$$\leq \frac{2}{A_n^2}\sum_{m=1}^{m_n}\left\{\int_0^{A_n} x\,dx+(1-F_{nm}(A_n))\right\} \to 0. \ (n\to\infty)$$