19. 共点線上の一組の実測点から、交点を推定する一問題

——ペプシン最小有効濃度推定に就て——

兼所員　増山元三郎

一次元拡散を利用する重層法は、元来ペニシリン微量定量法として筆者及び同僚島居、川上の工夫に依るものであるが、その基礎方程式（本誌、昭和22、前報と略す）は、式中に現れる常数と意味附け方を変えれば、他の場合に利用できることは明らかである。その一例として、蛋白の定量を考え、例としてペプシンの定量法を取上げた。従来の方法は倍数稀釈法で、蛋白を消化しうる最小濃度を決める誤差の極めて大きい方法又は他の方法で複雑な測定器械——例へば比濁計——を使って而も相当の誤差を伴う方法であった。筆者と大河原医学士の工夫した方法の考えの筋道は次の通りである。植物蛋白エデスチンを食塩で落とし、寒天で支え、小試験管に入れ、之にペプシン液を重層し、一定時間後、消化によつて透明になつた部分の長さを測るのである。ペプシンがエデスチンを消化するのに適当な水素イオン濃度に注意し、寒天層の上面のメニスカスの不整と恒温槽内の温度の不均一さを避けさえすれば、村田氏試

験管で0.2 mm の精度でこの長さが読み取れる。寒天層が充分長いなら、読取り迄の時間――その間は37°Cに保つ――をt，最小有効濃度をk，重層した液の濃度をC_0，拡散係数をDとすると，前報の通り$2C \gg k$の範囲で

$$\log C - \log(2k) = \frac{y^2}{\pi D t}。$$

ペニシリンの場合と異るのは，tが任意に選べる点である。質量作用の法測から考えて，消化産物が増せば，消化速度は遅くなると考えられるので，この公式の成立範囲が問題となる。大河原の実験に依ると百単位程度以下では，大凡8時間以内でこの公式が成立している。これを確める方法としては 1）Cを与え，yを測り$\log C$，y^2間に直線関係の成立することを利用する方法，2）、1）の方法で推定されたkの値が，D，tに依って変らないことを利用する方法 及び 3）Cを一定にすれば，y^2がtに比例することを利用する方法の三つが考えられ、何れも成立っている。実験條件の詳しいことは、大河原の他誌への報告に譲り，2）を利用して，kをできるだけ精密に推定する方法を玆に問題にしよう。

数学的に一般化することは，結果の公式が複雑で実用的でないのでやめて，実際家に計算しやすい形に解くことを考えよう。問題は、几回

の測定値群 $\{y_{\alpha i}\}$（$t_1, t_\alpha, \cdots\cdots, t_m$ に対応）が，夫々

$$E(y_{\alpha i}) = \beta_\alpha(x_i - \gamma) \quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots\cdots,N \\ \alpha=1,2,\cdots\cdots,m \end{matrix}$$

を母平均とし，共通の母分散 $\sigma^2 =$ 一定で正規分布をする場合，共通の母数 γ を推定することである。i の動く範囲が，各群で異り，x の値も異るとすると，結果は大層面倒な式になる。実際は同じ濃度 C に対する y を時間 t を変えて測るから，x_i は共通しているとして，実用性は失われない。更に計算の便利さを考えて，$\overline{x} = 0$ とする。但し之は本質的な制限ではない。

最尤法を使うと，

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathop{S}_{\alpha=1}^{m} \{y_{\alpha i} - \beta_\alpha(x_i - \gamma)\}^2$$

を最小ならしめるには，

$\partial Q / \partial \beta_\alpha = 0$ から $\overline{xy_\alpha} - \gamma\,\overline{y_\alpha} - \beta_\alpha(\overline{x^2} + \gamma^2) = 0$

$\partial Q / \partial \gamma = 0$ から $\displaystyle \mathop{S}_{\alpha=1}^{m} \beta_\alpha(\overline{y_\alpha} + \beta_\alpha \gamma) = 0$

$$\mathop{S}_{\alpha=1}^{m} \beta_\alpha\left(\overline{y_\alpha} + \gamma\,\frac{\overline{xy_\alpha} - \gamma\,\overline{y_\alpha}}{\overline{x^2} + \gamma^2}\right) = \mathop{S}_{\alpha=1}^{m} \beta_\alpha(\overline{x^2}\,\overline{y_\alpha} + \gamma^2\overline{y_\alpha} + \gamma\,\overline{xy_\alpha} - \gamma^2\,\overline{y_\alpha})\frac{1}{\overline{x^2} + \gamma^2}$$

$$\therefore \mathop{S}_{\alpha=1}^{m} \beta_\alpha(\overline{x^2}\,\overline{y_\alpha} + \gamma\,\overline{xy_\alpha}) = 0$$

又は

$$\mathop{S}_{\alpha=1}^{m}(\overline{xy_\alpha}-\gamma\overline{y_\alpha})(\overline{x^2}\,y_\alpha+\gamma\,\overline{xy_\alpha}=0.$$

$$=\mathop{S}_{\alpha=1}^{m}(-\gamma^2\,\overline{xy_\alpha}\,\overline{y_\alpha}-\gamma\,\overline{x^2}\,\overline{y_\alpha}^2+\gamma\,\overline{xy_\alpha}^2$$

$$+\overline{xy_\alpha}\,\overline{x^2y_\alpha})$$

$$\gamma^2 S\,\overline{xy_\alpha}\,\overline{y_\alpha}+\gamma S(\overline{x^2}\,\overline{y_\alpha}^2-\overline{xy_\alpha}^2)-\overline{x^2}\,S\,\overline{xy_\alpha}\,\overline{y_\alpha}=0$$

この二根のうち一根は無縁根である。

一般に幾つかの直線の交る点を推定する問題は、平面上では直線座標系を利用して解けるが、検定論が面倒であり，三次元になると推定する公式さえ未だできていない。