s_H, s_L とすると、

$$\log_{10} A \times \frac{\log_{10} \dfrac{s_H - s_L}{u_H - u_L}}{\log_{10} \dfrac{s_L - u_L}{s_H - s_L}} \doteqdot \log_{10} O$$

形式が全く同じなので、算定曲線用の図表がこの場合にも使へる。

この場合の著者の実験公式は 0.0244〜500 単位/cc の範囲で、培養中の孵卵器内の温度の一様性さえ注意すれば、よく成立つので、標準ペニシリン原液 S を一定の比 A に三度薄め、高濃度 H，中濃度 M，低濃度 L の三液を作り、之と被験液 U 一つだけから U の濃度お推定することもできる。この場合にわ、夫々に対する阻止帯の長さを h, m, l, u とすると、

$$G = (m^2 - lh)/(2m - l - h)$$

と置いて

$$\log_{10} O = \log_{10} A \times \frac{\log_{10} \dfrac{(G-u)(2m-l-h)}{(m-l)^2}}{\log_{10} \dfrac{h-m}{m-l}}$$

となる。

8、Generalized Capacity と Transfinite Diameter

所員　亀谷　正

1。Evans[1] は真性特異点の集合が logarithmic capacity 0 なる解析函数の研究や Dirichlet の problem の研究て有用な次の定理を証明した。

定理、ユークリッド空間の有界閉集合 E の Newtonian

capacity が 0 なるときは E の上の positive mass-distribution を適当にとりその potential が E の点では $+\infty$、他では有限になるやうに出来る。

Evans は Newtonian capacity と Newtonian transfinite diameter が一致することを利用した。定理は Generalized transfinite diameter 0 の場合も同様に證明出来る。そこで G. C. と G. T. D. が 0 か 0 でないかに内 (?) には equivalent なることがわかれば定理は Generalized capacity の場合についても成立する。ここでは之を證明しよう。

1) G. C. Evans ; Potentials and positively infinite singularity of harmonic functions, Monatshefte 43, 1936

2) 数学第一巻で亀谷俊司氏との共著で簡單に紹介するはず。

2° E をユークリッド空間 Ω の有界閉集合とし、Ω での Completely additive, non-negative な Borel の函数 $\mu(e)$ が $\mu(\Omega - E) = 0$ をみたすとき, μ を total mass $\mu(E)$ なる E の上の positive mass-distribution といふ。以下常に positive mass-distribution のみをあつかふから、之を單に distribution とよぶことにする。又 E は常に或一つの有界閉集合を表はすことにする。

今函数 $\Phi(r)$ は $r > 0$ で定義された単調減少（狭義）な正の連續函数で $\lim \Phi(r) = +\infty$ とする。

r_{PQ} を以て二点 $r\to 0$ P, Q の距離を表はし、次の函数を考へる

$$u(P) = \int_\Omega \Phi(r_{PQ})\,d\mu(Q) = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \Phi_N(r_{PQ})\,d\mu(Q)$$

こゝに $\Phi_N(r_{PQ}) = \Phi(r_{PQ})$ $(\Phi(r_{PQ}) \leqq N)$, N $(\Phi(r_{PQ}) > N)$
此の函数 u を $\Phi(r)$ に関する distribution μ の Generalized potential 或は簡単に μ の Φ − potential といふ。[1)]
$\Phi(r) = \log \frac{1}{r}$ 或 $\frac{1}{r^{m-2}}$ とすれば夫々 logarithmic 或は Neutonian potential であるこゝに m は dimension number[2)]
1)、$\Phi(r_{PQ})$ については P も Q なる P に内にする subharmonicity や equilibrium の問題の可能性等の假定にないことに注意
2) $\log \frac{1}{r}$ は negative になるがそれは本質的には関係なし、平面では logarithmic のときは Capacity と transfinite diameter が一致することが知られてゐる

E は closed であるから $P \in \Omega - E$ なる P では $u(P)$ は continuous。$P \in E$ では continuous function の増加列の極限として lower semi-continuous である。

次に

$$(\mu, \mu) = \int_\Omega \int_\Omega \Phi(r_{PQ})\, d\mu(P)\, d\mu(Q) = \int_\Omega u(P)\, d\mu(P)$$

なる有限或 $+\infty$ なる値を μ の Energy integral とよぶ。

μ を E の上の $\mu(E) = 1$ なる distribution とし

$$V_\mu = \sup_{P \in \Omega} \int \Phi(r_{PQ})\, d\mu(Q)$$

$$V(E) = \inf_\mu V_\mu$$

を考へ

$$\Phi(C(E)) = V(E)$$

なる $C(E)$ を Φ に関する E の Generalized capacity 或は E の Φ − capacity とよぶ

定義から $E \supset F$ なら $C(E) \geqq C(F)$ は明らかであらう。

又次の Lemma が成立する。

Lemma 1、 $C(E)>0$ なるための必要且十分條件は有界な potential をもつ E の上の total mass positive の distribution が存在することなり

之と Energyintegral の式から

Lemma 2. $C(E)>0$ なるときは Energy integral が finite になる如 total mass positive な E の上に distribution が存在する。

3 M を $\Omega - E$ の点とし、この M に関聯して Ω を有限個の閉集合 $\Omega_1, \Omega_2 - \Omega_m$ に分ち、(m は dimension にのみ依存する, M には依存のない)、M と $E\Omega_i$ の最短距離の点を P_i とするとき $\Omega_i E$ の任意の Q に対して $r_{MQ} \geqq r_{P_iQ}$ とすることが出来る。例へば Ω_i の任意の二点 P, Q に対して MP_i, MQ のなす角が $60°$ を越えないやうにとれば

$$\overline{P_iQ}^2 = \overline{MP_i}^2 + \overline{MQ}^2 - 2\,\overline{MQ}\;\overline{MP_i}\cos(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MP_i})$$
$$\leqq \overline{MP_i}^2 + \overline{MQ}^2 - \overline{MQ}\cdot\overline{MP_i}$$
$$= \overline{MQ}^2 + \overline{MP_i}\,(\overline{MP_i} - \overline{MQ}) \leqq \overline{MQ}^2$$

二次元でいへば M を中心として平面を 6 等分すればよい。

今 E の上の distribution μ の potential が E の上では有界であるとする即ち、

$$u(P) = \int_E \Phi(r_{PQ})\,d\mu(Q) < N \quad (P \in E)$$

とする、しかるときは

$$u(M) = \int_E \Phi(r_{MQ})\,d\mu(Q) \leqq \sum_{i=1}^{m} \int_{E\Omega} \Phi(r_{MQ})\,d\mu(Q)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m} \int_{E\Omega_i} \Phi(r_{P_iQ})\,d\mu(Q) \leqq \sum_{i=1}^{m} \int_{E} \Phi(r_{P_iQ})\,d\mu(Q) \leqq mN$$

即ち

Lemma 3. Eの上のdistributionによるPotentialがEの上で有界なら全空間で有界である。(maximal principleの代用) このLemmaを用ひLemma 2の逆を證明しよう。

Eの上のtotal mass positiveなdistribution μ のEnergy integralが有限と假定し、μ のpotential

$$u(P) = \int_E \Phi(r_{PQ})\, d\mu(Q)$$

を考へる。$n-1 < u(P) \leqq n$ $(n=1, 2\cdots)$ 或は $u(P) = \infty$ なるEの上の点集合を夫々 E_n 或は E_∞ とすれば

$$E_i E_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$E = E_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

である。$(\mu, \mu) < +\infty$ なる故に $\mu(E_\infty) = 0$ 従って

$$0 < \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

故に少くとも一つの n_0 に対して $\mu(E_{n_0}) > 0$ である

$$F = E_1 + \cdots + E_{n_0}$$

とおけば $u(P)$ のlower semi-continuityからFはEの閉部分集合である

$\nu(e) = \mu(F \cdot e)$ とおけば

$$v(P) = \int_F \Phi(r_{PQ})\, d\nu(Q) = \int_F \Phi(r_{PQ})\, d\mu(Q)$$

はtotal mass $\nu(F) = \mu(F) > 0$ なるFの上のdistribution ν のpotentialである。明らかに

$$v(P) \leqq u(P)$$

なる故　Fの上で $v(P) \leqq n_0$ である。従ってLemma 3により $v(P)$ は全空間で有界となる。さらにLemma 1を

用ふれば F従つてEのCapacity は positive である。
そとLemma 2から

定理1、 有界閉集合EのΦ−Capacity が正なるための必要且つ十分條件はEnergy integral が有限なTotal mass >0 なるEの上のdistrubution が存在することなり。

4、 E上にn個の点$P_1, P_2, \cdots P_n$ をとり(必ずしも異なるを要せず)

$$\min_{P_i, P_j \in E} \frac{\sum_{i<j} \Phi(r_{P_i P_j})}{\binom{n}{2}} = \min \frac{\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}(r_{P_i P_j})}{\binom{n}{2}} = \lambda_n$$

$$\Phi(D_n) = \lambda_n$$

とおけば D_n はnと共に単調に減少する。

$$D = \lim D_n$$

をEのΦに関するGeneralized Transfinite Diameter 或Φ−Diameter とよぶ。$\Phi(r) = \log\frac{1}{r}$ 或$\frac{1}{r}$ のときは

大々

$$D_n = \max_{P_i, P_j \in E} \sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{i<j} r_{P_i P_j}}$$

或は

$$D_n = \max_{P_i, P_j \in E} \frac{\binom{n}{2}}{\sum_{i<j} \frac{1}{r_{P_i P_j}}} \quad \text{である}$$

$\Phi(r_{PQ})$はPQに対してlower semi-continuous 故に

$$\lambda_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j} \Phi(r_{P_i^0 P_j^0}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \Phi(r_{P_i^0 P_j^0})$$

なる$P_1^0, P_2^0, \cdots, P_n^0$ がE上に存在する$\{P_i^0\}$ $i = 1, 2, \cdots n$ の各にmass $\frac{1}{n}$ をdistribute した total mass 1 の distribution をμ_n とおけば

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\Phi(r_{P_i^* P_j^*}) \geqq \int_E\int_E \Phi_N(r_{PQ})\,d\mu_n(P)\,d\mu_n(Q) - \frac{N}{n}$$

である $\{\mu_n\}$ から μ^* に weakly に converge する部分列 $\{\mu_{n_i}\}$ をとり $n_i \to \infty$ とすれば $\Phi_N(r_{PQ})$ は continuous 故

$$\Phi(D) \geqq \int_E\int_E \Phi_N(r_{PQ})\,d\mu^*(P)\,d\mu^*(Q)$$

$N\to\infty$ として

$$(A)\cdots\cdots \Phi(D) \geqq \int_E\int_E \Phi(r_{PQ})\,d\mu^*(P)\,d\mu(Q) = (\mu^*\mu^*)$$

一方 E の上の total mass 1 の任意の distribution を μ とす。$P_1, P_2, \cdots\cdots P_n$ を任意の E の点とすれば

$$\binom{n}{2}\lambda_n^1 \leqq \sum_{i<j}\Phi(r_{P_i P_j})$$

右辺を $P_1, \cdots P_n$ の函数として $d\mu$ で n 回 integrate すれば り O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles $\cdots$, Lund 1935. P.10 – P.19

$$\binom{n}{2}\lambda_n \leqq \sum_{i<j}\overbrace{\int_E\int_E\int_E}^{n} \Phi(r_{P_i P_j})\,d\mu(P_1)\cdots\cdots d\mu(P_n)$$

$\sum$ 内の各 integral は $\iint \Phi(r_{PQ})\,d\mu(P)\,d\mu(Q)$ に等しい故

$$\binom{n}{2}\lambda_2 \leqq \binom{n}{2}\iint \Phi(r_{PQ})\,d\mu(P)\,d\mu(Q)$$

は $$\Phi(D_n) \leqq \iint \Phi(r_{PQ})\,d\mu(P)\,d\mu(Q)$$

$n\to\infty$ として

$$\Phi(D) \leqq (\mu, \mu)$$

之と (A) とから

$$\Phi(D) = (\mu^*, \mu^*)$$

之と定理1とから目的の定理を得る即ち

定理2. 有界閉集合がΦ−Capacity positive なるための必要且十分條件はΦ−Diameter positive なることなり 従って1°で述べたことから

定理3、 有界閉集合EのΦ−Capacity が0なるときは potential がE上では+∞他では有限であるEの上の distribution が存在する。

9. Mean Concentration Function と Typical Function VI

所員 國澤清典

(1)

W. Feller によれば、次の定理が知られている。

定理4.2.3. どんな$\eta>0$に対しても、

$$(4.2.1)\quad P_r\left\{\left|\frac{1}{A_n}\sum_{m=1}^{m_n}\left(X_{nm}-\int_{-A_n}^{A_n} x\,dF_{nm}(x)\right)\right|\geq\eta\right\}\to 0,$$

$(n\to\infty)$ を満足する $\{A_n>0 \mid n=1,2,\cdots\}$ の存在するための十分條件は

$$(4.2.5)\quad \sum_{m=1}^{m_n}\int_{|x|>A_n} dF_{nm}(x)\to 0,\ (n\to\infty)$$

且つ

$$(4.2.6)\quad \sum_{m=1}^{m_n}\frac{1}{A_n^2}\int_{|x|<A_n} x^2\,dF_{nm}(x)\to 0,\ (n\to\infty)$$

であり、若し

$$F_{nm}(+0)\geq\lambda>0,\ F_{nm}(-0)\leq 1-\lambda,\ m=1,2,\cdots,m_n;\ n=1,2,\cdots$$

が満足されているならば、(4.2.5)と(4.2.6)は(4.2.1)