12、 正規確率過程の積分表示

兼任所員　丸山儀四郎

$X(t)=X_t(\omega)$ ($-\infty<t<\infty$；tは時間のパラメーター ωは確率空間を動くパラメーター) が平均値0，連続，正規確率過程とする，即ち任意に $t_1<t_2<\cdots<t_n$ を與へるとき(A) $X_{t_1}(\omega),\cdots X_{t_n}(\omega)$ はn次元の正規法則に従ひ(B) $\lim_{h\to 0} E\{X(t+h)-X(t)\}^2=0$ を満足するものとする。その場合次の定理が成立つ。

定理1、$X(t)$が連続正規確率過程平均値0ならばそれは次の様に表示される：

$$(1)\qquad X_t(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}K(t,x)\,d_x\psi(x,\omega),$$

但し茲に$K(t,x)$は各tに対してxの函数として$L^2(-\pi,\pi)$であり，$\int_{-\pi}^{\pi}\{K(t+h,x)-K(t,x)\}^2dx\to 0\ (h\to 0)$ を満足し，$\psi(x,\omega)$ は $Brown$ 運動である。

〔證明〕$X_t(\omega)$ をωの函数と考へれば，之はtをパラメーターとして $Hilbert$ 空間の曲線と考へる事が出来る。即ち$\{r_n\}$をすべての有理数の集合とするとき$\{X_{r_n}(\omega)\}$の決定する閉線状集合体を$\mathfrak{M}$とすれば$\mathfrak{M}$は$Hilbert$空間になり、$r_n\to t$ に対して $E\{X_{r_n}(\omega)-X_t(\omega)\}^2\to 0$ であるから，$X_t(\omega)$は$\mathfrak{M}$に含まれる曲線と考へる事が出来る。$\mathfrak{M}$の完全直交系$\{a_0(\omega),a_1(\omega),b_1(\omega),\cdots\}$をとり$X_t(\omega)$を展開する。但し$Ea_0^2=2\pi$，$Ea_n^2=Eb_n^2=\pi$ ($n=1,2,\cdots$)。

$$X_t(\omega)\sim\frac{C_0(t)}{2}a_0(\omega)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n(t)a_n(\omega)+d_n(t)b_n(\omega)\right)$$

$$C_0(t)=\frac{1}{\pi}E\{X_t(\omega)a_0(\omega)\}$$

(2) $$\begin{matrix} c_n(t) \\ d_n(t) \end{matrix} = \frac{1}{\pi} E\left\{ X_t(\omega) \begin{matrix} a_n(\omega) \\ b_n(\omega) \end{matrix} \right\}$$

$(a_0(\omega), a_1(\omega), b_1(\omega), \cdots)$ と $(1, \cos x, \sin x \cdots)$ を対応させると $\mathfrak{M}$ の点と $L^2(-\pi, \pi)$ の点と間に isometric な対応が与へられたことになる。$X_t(\omega)$ に対応する L^2 の要素を $K(t, x)$ とすれば

(3) $$K(t, x) \sim \frac{c_0(t)}{2} + \sum_1^\infty (c_n(t) \cos nx + d_n(t) \sin nx)。$$

Paley - Wiener, Fourier Transforms in the Complex domain, p. 147 に従って

$$\psi(x, \omega) \sim \frac{x}{2} a_0(\omega) + \sum_1^\infty \frac{-b_n(\omega)\cos nx + a_n(\omega)\sin nx}{n}$$

に依って x を時間のパラメーターとする Brown 運動を定義する。実際 $\psi(x, \omega)$ は正規法則に従ふ, それは $X_t(\omega)$ が正規であるから $X_{r_n}(\omega)$ から作った $\mathfrak{M}$ の要素は確率変数としては正規法則に従ふから, その直交系 $(a_0, a_1, b_1, \cdots\cdots)$ も正規法則に従ふ独立変数列である。このことを考慮すれば

$$E(\psi(b) - \psi(a))(\psi(d) - \psi(c))$$

$$= \frac{\pi}{2}(b-a)(d-c) + \pi \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}(\cos nb - \cos na)(\cos nd - \cos nc)$$

$$+ \pi \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}(\sin nb - \sin na)(\sin nd - \sin nc)$$

$$= \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq a < b \leqq c < d \leqq \pi) \\ \pi^2(b-a) & (a = c,\ b = d) \end{cases}$$

$\psi(x, a)$ の Fourier - Stieltjes coefficient を計算する。

$$E\left(\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\psi(x, \omega) \cdot \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, d\psi(x, \omega)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

を用ひて

$$E\left(\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\psi(x)-a_n\right)^2$$

$$(4)\quad =\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\, dx-2\pi^{-1}E\left(a_n(\omega)\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\psi(x)\right)+E\,a_n^2$$

$$E\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\psi(x)\right)=\lim_{\Delta(S)\to 0}\sum_{j=1}^{\nu}E\left(a_n\cos nx_j\cdot\Delta_j\psi\right).$$

但し $\Delta(S)$ は $(-\pi,\pi)$ の分割 $S:\ -\pi=x_0<x_1<\cdots<x_\nu=\pi$ に対し $\Delta(S)=\max_j(x_j-x_{j-1})$, $\Delta_j\psi=\psi(x_j)-\psi(x_{j-1})$ 從って

$E(a_n\Delta_j\psi)=\pi\dfrac{\sin nx_j-\sin nx_{j-1}}{n}$ から

$$E\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\psi(x)\right)=\pi n^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\sin nx=\pi^2。$$

この関係を上の (4) 式に代入して右辺が 0 になる事を知り、又その他の Fourier 係数に就いても同様にして

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\psi(x,\omega)=a_0(\omega)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, d\psi(x,\omega)=a_n(\omega),\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, d\psi(x,\omega)=b_n(\omega)。$$

各 t に対して (3) より.

$$K(t,x)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\left(\frac{C_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(C_n(t)\cos nx+d_n\sin nx\right)\right)$$

故に ($\underset{(\omega)}{l.i.m.}$ は ω に関する, 即ち確率変数の平均收斂)

$$\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}K(t,x)\,d_x\psi(x,\omega)=\underset{(\omega)}{l.i.m.}\,\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{C_0(t)}{2}-\sum_{n=1}^{N}\left(C_n\cos nx+d_n\sin nx\right)\right]d\psi(x,\omega)$$

$$= \underset{(\omega)}{l.i.m.}\left(\frac{c_0(t)}{2}a_0(\omega)+\sum_{n=1}^{N}(c_n(t)a_n(\omega)+d_n(t)b_n(\omega)\right)$$

$$= X_t(\omega) \qquad (-\infty<t<\infty).$$

定理2. $X_t(\omega)$が特に(A),(B)を満足し定常的のときは，$K(t,x)$は次の様に表現出来る：

$$K(t,x)=T^tF(x),\ K(0,x)=F(x)\in L^2(-\pi\pi),$$

T^tは上のL^2を定義域とする連続なユニタリ作用素群：$T^s T^t = T^{s+t}$, T^0に単位作用素，任意の$F\in L^2$に対し$\|T^h F-F\|\to 0\ (h\to 0)$.

〔證明〕曲線$X(t)$の張るHilbert空間$\mathfrak{M}$に於て$X(t)$を不変にするユニタリー作用素群T^tを考へる。即ち$f\in\mathfrak{M}$に対して$\|f-\sum_n \xi X(\tau)\|\to 0\ (n\to\infty)$を満足する曲線$X(t)$からの有限箇の点$X(\tau)$の$\xi$を係数とする一次結合の系列$\{\sum_n\}$ $\|\sum_m \xi X(\tau+t)-\sum_n \xi X(\tau+t)\|$

$$=\|\sum_m \xi X(\tau)-\sum_n \xi X(\tau)\|\to 0\ (m,n\to\infty)$$

であるから，$T^tf=\lim_{n\to\infty}\sum_n \xi X(\tau+t)$とおく．$T^tf$は$\sum_n$の選び方に無関係である，何故ならば他に$\sum_n'$ $\|f-\sum_n'\|\to 0$をとり，$\sum_n$と$\sum_n'$を一緒にしたものを始めの$\sum_n$の如く考へれば明らかである。依って$T^tf\ (-\infty<t<\infty)$は$\mathfrak{M}$に於て定義され$T^tf\in\mathfrak{M}$. 又任意の$f\in\mathfrak{M}$に対して$T^{-t}f$はT^tに依ってfに移される。T^tの値域は$\mathfrak{M}$である。$f\in\mathfrak{M}$, $g\in\mathfrak{M}$に対して$\|f-\sum_n \xi X(\tau)\|\to 0$, $\|g-\sum_n' \xi' X(\tau')\|\to 0$となる$\sum_n$, $\sum_n'$をとれば$X(t)$の定常性から

$$(T^tf,T^tg)=\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_n \xi X(\tau+t)\sum \xi' X(\tau+t)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_n \xi X(\tau)\sum_n' \xi' X(\tau')\right)=(f,g).$$

又T^tの定義から容易に$T^sT^t=T^{s+t}$, $T^0=$単位作用素。

$f \in \mathfrak{M}$を先に与へた直交系$(a_0, a_1, \cdots)$で展開して

$$f \sim \frac{c_0}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n + d_n b_n).$$

$a_0, a_1, \cdots$は$X(t)$の有限箇の一次結合であるから$\| T^h a_0 \| \to 0 \ (h \to 0)$等従つて$N$を充分大、$|h|$を充分小にとれば

$$\| T^h f - f \| = \| c_0/2 \, T^h a_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n T^h a_n + d_n T^h b_n) - c_0/2 \, a_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n a_n + d_n b_n) \| + 2 \| \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n a_n + d_n b_n) \| < \varepsilon$$

以上からT^tは$\mathfrak{M}$に於て$X(t)$を不変にする，連続なユニタリー作業素の群になる。$\mathfrak{M}$とL^2の対應と$X(t)$が$K(t, x)$に対應する事から定理に言ふ様なT^tが得られる事は明らかである。

$(-\pi, \pi)$に於ける Brown 運動$\psi(x, \omega)$は変換

$$\Psi(\xi, \omega) = \int_0^{2 \tan^{-1} \xi} 2^{-1/2} \sec(x/2) \, d\psi(x, \omega)$$

に依つて$(-\infty, \infty)$に於ける Brown 運動$\Psi(\xi, \omega)$に移る。之に対して$F(x)(-\pi, \pi)$と$f(x)(-\infty, \infty)$の対應

$$F(x) = 2^{-1/2} f(\tan x/2) \sec x/2$$

を考へれば定常的確率過程$X(t)$は次の様に表はされる：

$$(5) \qquad X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T^t f(\xi) \, d\Psi(\xi)$$

Wiener は(5)の様な形の積分を始めて取扱つた（Paley - Wiener, 上掲書）。此処には逆の問題を取扱つたのである。此の様な形の積分及定常的確率過程に関する其他の性質に関する研究は定常的確率過程の調和解析，九州

帝國大学理学部研究報告（印刷中）に述べる。

最後に Wiener の考へに従つて一つの differential process を定義して定常的確率過の存在に関す Khintchine - Kolmogoroff の定理の証明を与へる。

定理 3　與へられたスペクトル分布 $F(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$ $(-\pi \leqq \lambda \leqq \pi)$ を持つ正規定常的確率過程（時系列）が存在する。(Khintchine - Kolmogoroff).

〔証明〕　一般性を失ふ事なく確率過程の平均値を 0 としてよい。又時系列の場合は連續パラメーター t のときと全く同様である。（積分を級数でおきかへる等）。$F(\lambda)$ に依る Stieltjes に関する L^2 の完全正規直交系を φ_1, φ_2, …… とする。α_1, α_2, …を平均値 0 標準偏差 1 の正規法則 $N(0,1)$ に従ふ独立変数列とする。f の展開

$$f \sim \sum C_n \varphi_n$$

に対して確率変数 $\psi(f) \sim \sum C_n \alpha_n$ を相應させる。$\sum C_n = \|f\|^2$ であるから $\psi(f)$ を定義する右辺の級数は確率 1 で收斂する。又 $g \sim \sum d_n \varphi_n$ とすれば

$$(6) \quad E\psi(f)\psi(g) = \sum C_n d_n = (f, g).$$

f として特に

$$f(\lambda) = 1 \qquad -\infty < \lambda \leqq t$$
$$= 0 \qquad \lambda > t$$

をとり

$$(8) \quad \| \psi(t, \omega) \ \psi(f) \sim \sum \int_{-\infty}^{t} \varphi_n \, dF \, \alpha_n$$

とおけば $\psi(t, \omega)$ は normal differential process になる事は (6) を用ひて証明出来る。又 $E\{\psi(a) - \psi(b)\}^2 = F(a) - F(b)$。

次に（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$）とは独立で矢張り$N(0,1)$に従ふ独立変数列（$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$）に依つて(8)に依つて$\tilde{\psi}(t)$を定義すれば$\psi(t)$独立で同じ法則に従ふprocessが得られる。この両者から

$$(9) \quad X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda t\, d\psi(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda t\, d\tilde{\psi}(\lambda)$$

を作ればX(t)は$F(\lambda)$をスペクトル分布に持つ正規定常的確率過程となる。即ち

$$EX(t)X(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda t \cos\lambda(t+\tau)\, dF(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda t \sin\lambda(t+\tau)\, dF(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda\tau\, dF(\lambda), \qquad \text{證明終。}$$

この逆の問題即ち定常的確率過程はdifferential processのFourier-Stieltjes変換である事が証明出来，定常的確率過程はこの様な方ばスペクトルとしてdifferential processを導入する事によりその性質が一層分り易くなるのである。この事に関しては上掲、九州帝国大学理学部研究報告を見られたい。

以　上