㉚ 減衰振動の静止点の一推定法

研究員　増山元三郎

減衰振動で静止点を推定する方法として普通よく知られている方法は，極大極小の読みを利用する方法である。この方法は簡単であるが，極大値又は極小値を実測できない場合には使へない。で次のような方法を考へてみた。

一般に，A，B，C を未知実常数として

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2A\frac{dy}{dt}+By+C=0$$

を満す $y(t)$ の幾つかの実測値から A，B，C を推定する問題と考へると，よく知られているように

$$x=y+C/B \qquad (B\neq 0)$$

と置けば

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2A\frac{dx}{dt}+Bx=0.$$

この解は，実常数だけを使って表せば，

$$x(t)=\alpha_1 e^{\beta_1 t}+\alpha_2 e^{\beta_2 t} \qquad A^2>B \text{ の時}$$

$$=(\gamma_1+\gamma_2 t)e^{\beta t} \qquad A^2=B \text{ の時}$$

$$=(\delta_1\cos\omega t+\delta_2\sin\omega t)e^{\beta t} \qquad A^2<B \text{ の時}$$

どれでもやり方は同じだから，最後の場合を解こう。

t を等差級数的に与へて $y(t)$ を測ったとする。公差を h と置こう。h を固定すると，

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t+h)+2A\frac{d}{dA}y(t+h)+By(t+h)+C=0$$

従って

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta y(t)+2A\frac{d}{dt}\Delta y(t)+B\Delta y(t)=0$$

この場合の A, B の推定法は The Running ? Empirical formulas, 1917. 公式 XVII, XVIII と本質的に等しい、但し同書には $A^2=B$ に相当する場合が缺けているが，この場合もやり方は大差ない。

今問題にするのは，

$$y(t)=-C/B+(\delta_1\cos\omega t+\delta_2\sin\omega t)e^{\beta t}$$

の場合である。この式から

$$y(t+2h)-2\cos\omega h\, e^{\beta h}y(t+h)+e^{2\beta h}y(t)$$
$$=(-C/B)(1-2\cos\omega h\, e^{\beta h}+e^{2\beta h}).$$

従って

$$\left\{\frac{\Delta y(t+2h)}{\Delta y(t)}\right\}-2\cos\omega h\, e^{\beta h}\left\{\frac{\Delta y(t+h)}{\Delta y(t)}\right\}+e^{2\beta h}=0$$

従って一定の時間 h おきに読み取った値 $y(t)$, $y(t+h)$, $y(t+2h)$, …… から一次定差を作ると，点

$$\left(\frac{\Delta y(t+h)}{\Delta y(t)},\ \frac{\Delta y(t+2h)}{\Delta y(t)}\right)$$

は同一線上にある。この直線の傾きと座標軸を切る点とから $e^{2\beta h}$, $\cos\omega h$, $e^{\beta h}$ が定まる。従って一つ置いて前の式から C/B が定まることに成る。h が知れているから，β や ω もこれから直ちに分る，

インシュリンを注射した場合，注射された個体固有の血糖量水準を推定する問題を解くために富谷，日時の資料に

より考えた方法である。この場合 $A>0$, $C/B<0$ であるが A^2-B は正にも負にもなる。注射後30分おきに採血しているので、h は一定であるが、連続測定は現在不可能なので、普通の方法は使えない。又血糖量の変化を表すのに上の微分方程式を使ったのは一試案で、少くも當谷の資料では実験誤差の範囲で成立つように思われるが、夫自身尚お検討を要しよう。

この方式は常数係数線型微分方程式の解に拡張できる。ただ二次元以上は図で示すことが困難になるだけである。実際には誤差を伴うことを一応無視してあるが、現在の最小自乗法はこの場合使えないので今後の研究に俟ちたい。この場合は

$$\begin{pmatrix} y(t) & y(t+h) & y(t+2h) & \cdots \\ y(t+h) & y(t+2h) & y(t+3h) & \cdots \\ y(t+2h) & y(t+3h) & y(t+4h) & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \end{pmatrix}$$

の階数（t を変えて）の推定の問題と密接な関係がある。即ち y に誤差がなければ階数が k の場合、誤差分布を与えて階数が $k+l$ と判定される確率を求める問題である。