附加えておこう。

(32) 函数の Iteration と Torus 上の微分方程式

所員　黒返　正

1.1。今 $-\infty < \theta_0 < +\infty$ で定義された単調増加(狭義)連続函数 $\eta = \eta(\theta_0)$ が $\eta(\theta_0 + 2\pi) = \eta(\theta_0) + 2\pi$ をみたすとする

松下所員よりこの函数に対して次の如き問題が提出された即ち

(1)　$\theta_1 = \eta(\theta_0),\quad \theta_2 = \eta(\theta_1),\ \cdots\cdots\ \theta_n = \eta(\theta_{n-1}),\cdots$

とき

(2)　$2\pi(k-1) < \theta_n - \theta_0 \leqq 2\pi k$

が成立する整数 k に対して

(3)　$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \alpha$$

が存在するか。又 α が有理数のときは適当な n に対して

$$\theta_n \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$$

となるか

この問題は既に Torus 上の微分方程式に関する Poincaré の研究(Œuvres complètes t. 1 P. 137–158) 次いで Denjoy の研究(Liouville journal, 1932)により徹底的に論ぜられてあることを後で知ったか方法が違うので次に述べてみる。

(2)から直ちにわかる如く吾々の問題は $\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n-\theta_0}{n}=2\pi\alpha$
の存在の問題と同等である。

今 2π を Period とする連続函数の空間 C を考へその元 $f(\theta_0)$ の norm を普通の如く $\|f\| \doteq \max|f(\theta_0)|$ とす。

$\boxed{\text{Lemma}}$ <u>T を C から C 迄への $\|T\|=1$ なる線型作用素とし C の或元 f に対して</u>

$$f_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}T^{\nu}f \qquad (n=1,2,\cdots)$$

<u>とおくとき $\{f_n\}$ から $\bar f$ に収斂する部分列 $\{f_{n_i}\}$ がとれるならば</u>

$$\lim_{n\to\infty}f_n=\bar f$$

<u>である</u>

$\boxed{\text{証明}}$ [1] $$Tf_{n_i}-f_{n_i}=\frac{1}{n_i}\left\{T^{n_i}f-f\right\}$$ なる故

$$\|Tf_{n_i}-f_{n_i}\|\leqq\frac{1}{n_i}\left\{\|T^{n_i}f\|+\|f\|\right\}\leqq\frac{2}{n_i}\|f\|$$

$n_i\to\infty$ のとき $\|Tf_{n_i}-f_{n_i}\|\to 0$ 故に $T\bar f=\bar f$

今 $f=f-\bar f+\bar f$ とおけば

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}T^{\nu}f=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}T^{\nu}(f-\bar f)+\bar f$$

従って $\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}T^{\nu}(f-\bar f)\to 0\ (n\to\infty)$ を示せばよい。

---

1) この証明は吉田耕作氏著 線型作用素論 P.28による。

さて$(I-T)g$の形に書ける元の全体をKとすれば(Iは単位作用素)明かにKは linear subspace である。

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} T^{\nu} h = \frac{1}{n}(I-T^{n})g$$

なる故$n\to\infty$のとき$h_n\to 0$である。Kの closure を$\bar{K}$としその任意の元をh'とすれば任意の$\varepsilon>0$に対して

$$h' = h + u, \quad \|u\| < \varepsilon$$

なるKの元hが存在する。然るときは

$$h'_n = h_n + u_n$$

で$h_n\to 0\ (n\to\infty)$且$\|u_n\|<\varepsilon$　故に$\overline{\lim}\,\|h'_n\| \leqq \varepsilon$　εは任意故$\lim\limits_{n\to\infty}\|h'_n\| = 0$　即ち$h'_n\to 0\ (n\to\infty)$

従って$f-\bar{f}\in\bar{K}$であることをいへば lemma は証明されたことになる。

$$f-\bar{f} = f - \lim f_{n_i} = \lim \frac{1}{n_i}\sum_{\nu=1}^{n_i-1}(I-T)(I+T+\cdots+T^{\nu-1})f$$

から$f-\bar{f}\in\bar{K}$がわかる　　　　(證終)

さて任意のCの元$f(\theta_0)$に対して$f(\eta(\theta_0))=f_1(\theta_0)$を対応させる operator Tを考へると$\eta(\theta_0+2\pi)=\eta(\theta_0)+2\pi$から$T$は$C$から$C$内への線型作用素で$\|T\|=1$である。

又$\psi(\theta_0)=\eta(\theta_0)-\theta_0$とおけば明かに$\psi\in C$である。

$$\frac{\theta_n-\theta_0}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\theta_{\nu+1}-\theta_\nu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\psi(\theta_\nu)$$

故に

$$\frac{\theta_n-\theta_0}{n} = \psi_n(\theta_0) \quad \psi_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}T^{\nu}\psi$$

である。

$\theta_0 < \theta_0' < \theta_0 + 2\pi$ に対して $\eta(\theta_0) < \eta(\theta_0') < \eta(\theta_0) + 2\pi$。

なる故に $\theta_1 < \theta_1' < \theta_1 + 2\pi$，同様にして $\theta_n < \theta_n' < \theta_n + 2\pi$。

従って

$$|\psi_n(\theta_0') - \psi_n(\theta_0)| \leq \frac{1}{n}\{|\theta_n' - \theta_n| + |\theta_0' - \theta_0|\} \leq \frac{4\pi}{n}$$

$\therefore$

$$\text{(A)} \quad \lim_{n \to \infty} |\psi_n(\theta_0') + \psi_n(\theta_0)| = 0$$

故に $\{\psi_n(\theta_0)\}$ は正規族をなすから C の Normal の意味で $\psi_{n_i}(\theta_0) \to 2\pi\alpha(\theta_0)$ なる如き部分列 $\{\psi_{n_i}(\theta_0)\}$ が存在する。従って Lemma から C の Norm の意味で $\psi_n(\theta_0) \longrightarrow 2\pi\alpha(\theta_0)$ $(n \to \infty)$。

(A)から明かに $\alpha(\theta_0)$ は常数 α である。即ち

$\boxed{\text{定理 1}}$ $(\theta_n - \theta_0)/n$ は θ_0 の如何にかゝはらず $n \to \infty$ のとき一定数 $2\pi\alpha$ に収斂する。

$\eta = \eta(\theta_0)$ の逆函数を $\omega = \omega(\theta_0)$ とし

$\theta_{-1} = \omega(\theta_0)$ $\quad \theta_{-2} = \omega(\theta_{-1}), \cdots \theta_{-n} = \omega(\theta_{-(n-1)}), \cdots$

とおけば

$$\frac{\theta_{-n} - \theta_0}{-n} = \frac{\{\theta_{-n} - \theta_{-(n-1)}\} + \cdots + \{\theta_{-1} - \theta_0\}}{-n}$$

$$= \frac{\psi(\theta_{-n}) + \cdots + \psi(\theta_{-1})}{n}$$

従って θ_{-n} を独立変数と考へ之を $\psi_n(\theta_{-n})$ とすれば

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} T^{\nu} \psi$$

従って　$\|\psi_n - 2\alpha\pi\| \to 0 \quad (n \to \infty)$

故に

要　$\frac{\theta_n-\theta_0}{n}$ は θ_0 の如何にかゝはらず $n \to \pm\infty$ のとき一定値 $2\alpha\pi$ に収斂する。

1, 次に　$\theta_0 \to e^{i\theta_0}$ により θ_0 を単位円周E上の点 P_0 で表すことにすれば　$\theta_0 \equiv \theta_0' \pmod{2\pi}$ なる θ_0, θ_0' は同一点 P_0 に対応し、$\varphi(\theta_0+2\pi) = \varphi(\theta_0)+2\pi$ 及びその単調連続なることから $\varphi = \varphi(\theta_0)$ はEを自身にうつす Topological mapping を定義する。$\theta_0 < \theta_0' < \theta_0 + 2\pi \to \theta_1 < \theta_1' < \theta_1 + 2\pi$ なる故Aは E上の点の順序を変へない mapping である。θ_n と $P_n = A^n(P_0)$ とが対応する。$P_0 = P_q \ (q \neq 0)$ なるとき A(或 φ) は periodic な点列 $\{P_0, P_1, \cdots\}$ をもつといひ $P_0, P_1, \cdots$ がE上で dense の時は ergodic な点列 $\{P_0, P_1, \cdots\}$ をもつといふ。又 $\{P_0, P_1, \cdots\}$ をA(或 φ)の点列とよぶ。

$$\frac{\theta_n - \theta_0}{2n\pi} = \frac{\overset{\frown}{P_0P_1} + \overset{\frown}{P_1P_2} + \cdots + \overset{\frown}{P_{n-1}P_n}}{2n\pi}$$

であるから　この極限値 α を廻轉数といふ。

さて φ が periodic な点列 $\{P_i\}$ をもつとすれば 即ち $P_q = P_0$ とすれば　$P_{q+i} = P_i$,　$\overset{\frown}{P_0P_1} + \cdots + \overset{\frown}{P_{q-1}P_q} = 2p\pi$ (p は整数)　従って任意の正の整数 ν に対して

$$\frac{\theta_{\nu q} - \theta_0}{2\nu q\pi} = \frac{\nu(\overset{\frown}{P_0P_1} + \cdots + \overset{\frown}{P_{q-1}P_q})}{2\nu q\pi} = \frac{p}{q}$$

$$\therefore \lim_{\nu\to\infty} \frac{\theta_{\nu q} - \theta_0}{2\nu q\pi} = \frac{p}{q} \quad 即 \quad \alpha = \frac{p}{q}$$

さて α が廻転数なるとき、$\varphi(\theta_0)=\theta_m(\theta_0)-\theta_0-2m\alpha\pi$ とおくときは（m は任意の整数、α は無理数でもよい）

$$\frac{\varphi(\theta_0)+\varphi(\theta_m)+\cdots+\varphi(\theta_{(r-1)m})}{r}=\frac{1}{r}\left[\theta_{rm}-\theta_0-2rm\alpha\pi\right]$$

$$=m\left(\frac{\theta_{mr}-\theta_0}{mr}-2\alpha\pi\right)$$

は $r\to\infty$ のとき 0 に収斂する。$\varphi\in C$ であるから $\varphi(\theta_0)$ を E 上の点 P_0 の函数と考へ、$P_0\ P_1\ \cdots\cdots\ P_{(r-1)m}$ に $\frac{1}{r}$ なる mass をもつ distribution を μ_r とすれば

$$\frac{\sum_{i=0}^{r-1}\varphi(\theta_{im})}{r}=\int_E\varphi(P)\,d\mu_r(P)$$

とかける。μ_r は total mass 1 の positive mass-distribution 故 $\{\mu_r\}$ から部分列 $\{\mu_{r_j}\}$ をとり weakly に total mass 1 の positive mass-distribution μ に収斂するように出来る。

即ち

$$0=\lim_{j\to\infty}\int_E\varphi(P)\,d\mu_{r_j}(P)=\int_E\varphi(P)\,d\mu(P)$$

若し $\varphi(P)=0$ なる点が存在しないとすれば $\varphi(P)$ は連續故一定符号である。例へば $\varphi(P)>0$ とすればすべての P に対して $\varphi(P)\geqq m>0$ なる m がある。従って

$$0\geqq\int_E m\,d\mu(P)=m>0$$

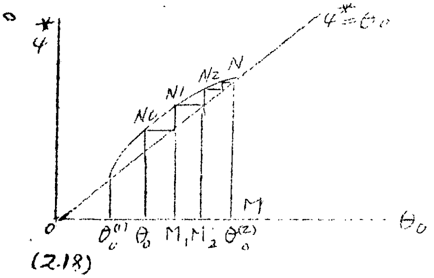
となり不合理　故にすくなくとも一点 P_0 で $\varphi(P_0)=0$ 即ち $\theta_m-\theta_0-2m\alpha\pi=0$ なるすくなくとも一つの

θ_0 がある。

α が有理数 $\frac{p}{q}$ なるときは $n=q$ とすれば $\theta_q-\theta_0-2p\pi=0$ なる θ_0 が存在する。即ち $\theta_q\equiv\theta_0 \pmod{2\pi}$ （$P_0=P_q$） なる θ_0 が存在する、従って次の定理を得る。

定理2。 $\mathfrak{T}(E)$ 〔或 A(P_0)〕 がすくなくとも一つの periodic な点列をもつための必要且十分条件は廻転数 α が有理数なることである。

I.3。 廻転数 α が有理数 $\frac{p}{q}$ （p, q は互に素）のときをもう少し調べよう。定理2の証明から一点 P_0 が廻転数 $\frac{p}{q}$ の A（或 $\mathfrak{T}$）の periodic な点列に属するための完全条件は $\varphi(P_0)=0$ （$\theta_q-\theta_0=2p\pi$） をみたすことである。φ の連続性から $\varphi(P)=0$ の零点の全体は E 上の閉集合 F である。F が E と一致するときはすべての点が periodic な点列に属す。そうでないときは F に contiguous な開区間が存在する。之を $\widehat{P_0^{(1)}P_0^{(2)}}$ とす（$P_0^{(1)}$ から $P_0^{(2)}$ へ向ふ方向が正の方向と一致するようにとる） $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}$ は periodic な点列に属す。この区間の任意の一点を P_0 とす、$\varphi(P)$ はこの区間で一定符号である故例へば $\varphi(P)>0$ と仮定する。今 E の点を θ の方へなほして考へる。$P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, P_0$ に対応する点を $\theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)}, \theta_0$ とし $\theta_0^{(1)}<\theta_0<\theta_0^{(2)}<\theta_0^{(1)}+2\pi$ とす。



(2.18)

$\varphi^*(\theta_0)=\theta_q-2p\pi$ とおけば $\theta_q-2p\pi,\ \theta_{2q}-2\cdot 2p\pi, \cdots\cdots \theta_{\nu q}-2\nu p\pi \cdots\cdots$ は左図の $OM_1, OM_2, OM_3, \cdots\cdots$

に等しいことがわかる、曲線は $\varphi^* = \theta_g - 2p\pi$ を表はす,
例へば 明かに $M_0N_0 = OM_1 = \theta_g - 2p\pi$,
又 $M_1N_1 = ON_2 = \varphi^*(\theta_g - 2p\pi) = \theta_{2g} - 4p\pi$ 以下同様 然して $OM_\nu \to OM = \theta_0^{(2)}$ $(\nu \to \infty)$ 即ち

$$\theta_{\nu g} - 2p\nu\pi \longrightarrow \theta_0^{(2)} \quad (\nu \to \infty)$$

従って単位円の上で考へれば $P_{\nu g}$ は $P_0^{(2)}$ に正の向きに近づくことを知る、同様にして $P_0, P_{-g}, P_{-2g}, \cdots P_{-\nu g}$, $\cdots$ は負の向きに $P_0^{(1)}$ に近づく, $\varphi(P) < 0$ のときは向きが反対になる。

以上のことから periodic な点列の点にはそれにいくらでも近づく $\{P_i\}$ が存在する。即 periodic な点列は Poincaré の所謂 Cycle limite である。近づく方の点列は spiral である。

1.4*。次には廻転数 α が無理数即ち periodic な点列を持たない場合であるが、それについては Denjoy が次の定理を証明した。

定理3 $\varphi'(\theta_0)$ が存在して、$[0\ 2\pi]$ で有界変分で且 $\varphi'(\theta_0) > m > 0$ ならばすべての点列は ergodic である。

Denjoy はこれを連分数の理論を用いて証明したが C. L. Siegel は (Annals of Math. Vol 46, 1945) で連分数を用ふることなしにきれいな証明を与へた。
$\varphi'(\theta_0)$ の有界変分の仮定をのぞけば $\varphi'(\theta_0)$ が連続であつ

* 以下は結果の紹介故証明略

ても定理が成立しないことを Denjoy は示した。

〔注意〕 $\eta'(\theta_0) > m > 0$ なる仮定は $\eta'(\theta_0)$ の有界変分から $\log \eta'(\theta_0)$ の有界変分を出すために設けたるもの

2.1。以上は微分方程式とは無関係に話を進めたが次にその微分方程式への応用をのべる。

Torus 上の点を cartesian coordinates (φ, θ) で表はす。即ち $\varphi \equiv \varphi' \pmod{2\pi}$, $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$ なるとき (φ, θ) と (φ', θ') は同一点と考へる。$\varphi = const$ は meridian を表はすとす。

$$(1) \qquad \frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta)$$

なる微分方程式を考へる。こゝに $f(\varphi, \theta)$ は φ 及び θ に関して 2π を周期にもつ連続函数とす。更に解の一意性が保証されてゐるとす。例へば θ に関する Lipschitz の條件がみたされてゐるとす。

今 $\varphi = \varphi_0$ で $\theta = \theta_0$ なる (1) の解を $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ とすれば、$\theta_0 = u(\varphi_0, \theta_0)$ である。〔$u(\varphi, \theta_0)$ は φ に関して必ずしも periodic にならぬことに注意〕, $f(\varphi, \theta)$ の連続性からすべての解は meridian に切しない故 $u(\varphi, \theta_0)$ はすべての φ で定義されてゐる。

今 $u(\varphi_0 + 2\pi, \theta_0)$ を θ_0 の函数と考え $\eta(\theta_0)$ とおけば $\eta(\theta_0)$ は次の性質をもつ。

(イ) $\eta(\theta_0)$ は θ_0 の連続函数である。

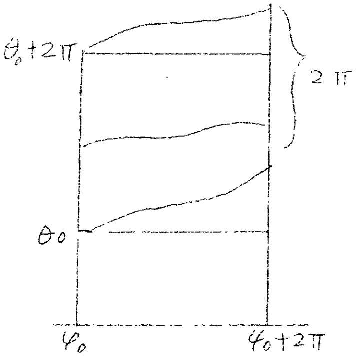
(之は $f(\varphi, \theta)$ の連続性から保証される)

(ロ) $\eta(\theta_0)$ は θ_0 の単調増加(狭義)函数である

(之は解の一意性からわかる)

(ハ) $\eta(\theta_0+2\pi)=\eta(\theta_0)+2\pi$

（之は $f(\varphi,\theta)$ の周期性からわかる）



従って $\eta(\theta_0)$ は 1.1 の初めに述べた性質を完全にもってゐる。$\theta_1=\eta(\theta_0)$ とおけば $(\varphi_0+2\pi,\theta_1)$ は (φ_0,θ_0) から出発した解が再び $\varphi=\varphi_0$ と交はる点の座標である。

一般に

$$\theta_1=\eta(\theta_0),\quad \theta_2=\eta(\theta_1),\cdots\quad \theta_n=\eta(\theta_{n-1}),\cdots$$

とおけば

$$u(\varphi_0+2n\pi,\theta_0)=\theta_n$$

となる。同様に $u(\varphi_0-2\pi,\theta_0)=\omega(\theta_0)$ とおけば $\omega(\theta_0)$ は $\eta(\theta_0)$ の逆函数で

$$\theta_{-1}=\omega(\theta_0),\quad \theta_{-2}=\omega(\theta_{-1})\cdots\quad \theta_{-n}=\omega(\theta_{-n+1})\cdots$$

とおけば

$$\theta_{-n}=u(\varphi_0-2n\pi,\theta_0)$$

である

θ_n は $\varphi=\varphi_0$, $\theta=\theta_0$ から出発した解が正の方向に n 回まはって $\varphi=\varphi_0$ と交はる点の θ 座標，θ_{-n} は負の方向に n 回まはって $\varphi=\varphi_0$ と交はる点の θ 座標である。

$\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_n, \cdots$ を単位円周上の点 $P_0, P_1, \cdots$ であらはせば $\{P_n\}$ は ψ(これは τ により定義される Topological mapping A) の系列である。

2.2、以上のことから 1.2, 1.3, 1.4 で述べたことを微分方程式の言葉でいへば次の如くなる。

定理1′　微分方程式 (1) が少くとも一つの周期解をもつための必要且十分條件は $\psi(\theta_0)$ の廻轉数 α が有理数なることである。

〔注意〕　廻轉数は一つの解を知ることにより定めることが出来るが、解を知ることなく $f(\varphi, \theta)$ だけから周期解の存在を知る一般的方法は知られてゐない。

2.3。1.3 の議論から α が有理数のときはすべての解が周期解となるか　或は周期解には他の解が無限にまきつく即ちその周期解が Cycle limite でありspiral が存在する

$\psi(\theta_0) = \theta_q - \theta_0 - 2p\pi$, $(\alpha = \frac{p}{q})$ の 0 点が $0 \leqq \theta_0 \leqq 2\pi$ で無数にあれば少くとも一つの 0 点は他の 0 点の集積点となり従って一つの周期解に他の周期解が集積する。然し $f(\varphi, \theta)$ が analytic のときは $\psi(\theta_0)$ も analytic となり　0 点は有限個であるから周期解は有限個で spiral により両側からまきつかれる。

定理3に対応して

定理3′　微分方程式 (1) が周期解をもたぬとき $\psi'(\theta_0)$ が存在して $\langle 0, 2\pi \rangle$ で有界変分且 $\psi'(\theta_0) \geqq m > 0$ ならば

すべての解は ergodic である。

定理3′の假定を $f(\varphi,\theta)$ の方で十分條件の形でいへば例へば $\frac{\partial f}{\partial\theta}$ が θ,φ に関して連續で $[0,2\pi]$ で θ の函數として φ に関して一様に有限變分であればよい。

之は

$$\log \eta'(\theta_0)=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi}\frac{\partial f(\varphi,\eta(\varphi,\theta_0))}{\partial\theta}\,d\varphi$$

からわかる。從つて特に $\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$ が連續(或は有界)ならば定理3′は成立す。特に f が analytic ならばなほさら。

Siegel は方程式(1)を一般にして

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=g(\varphi,\theta)\qquad \frac{d\theta}{dt}=f(\varphi,\theta)$$

ここで f,g は共に φ,θ に関して 2π を周期にもち二回まで連續的微分可能且共通の0点をもたぬとす。

然るとき(2)が周期解をもたねばすべての解は ergodic になることを證明してゐる。(1)の場合の transformation の役目をする曲率が連續な閉曲線の存在を證明し定理3を適用してゐる。

[回轉數を導入することなく]。

以上