1、 選 抜 問 題

1

掛谷宗一

單純投票

今人間の優劣の程度は$-\infty$より$+\infty$までの実数にて計らるゝものとし其分布は平均値0なるGauss分布$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma^2}x^2}$をなすものとす

茲にm人（$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \cdots\cdots \mathfrak{X}_m$）ありて其優劣度を夫々上の分布に従へる変数

$$x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots x_m \qquad (1)$$

にて表

一定　…力を有する人が此m人を観察し、誤差によりて$\mathfrak{X}_k$なる人を最も優れたりと思考する確率即ち$\mathfrak{X}_k$を選挙する確率は如何

先づ$\mathfrak{X}_k$の評價をxと見ることの　ハ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,h} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_k)^2} \qquad (2)$$

次に$\mathfrak{X}_l$の評價をx以下と見ることの確率は

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,h}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_l)^2}dx \qquad l \neq k \qquad (3)$$

故に$\mathfrak{X}_k$の評價をxと見て而も$\mathfrak{X}_k$を選挙する事の確率は（2）と（3）のlにK以外の凡ての價を代入せるものの連乗積との積なり

凡てのxに就て之を加へたるもの即ち

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi}\,h)^m}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_k)^2}\left\{\prod_{l \neq k}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_l)}dx\right\}dx \qquad (4)$$

が$\mathfrak{X}_k$を選挙する確率なり

$$\prod_{l=1}^{m}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_K)^2}dx \doteq A(x; x_1, x_2\cdots x_m) \qquad (5)$$

と置けば(4)'は

$$P_K(x_1, x_2\cdots x_m) \doteq \frac{1}{(\sqrt{\pi}h)^m}\int_{-\infty}^{\infty} A(x; x_1,\cdots x_m)\frac{e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_K)^2}}{\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_K)^2}dx}dx \qquad (6)$$

とも書き得る

今一定の能力(一定のh)をもつn人が選挙するとしX_Kの得票数をn_Kとすれば

$$n_1+n_2\cdots\cdots+n_m = n \qquad (7)$$

斯かる得票が生ずる確率は

$$\prod_K P_K^{n_K}(x_1,\cdots\cdots x_m) \qquad (8)$$

$x_1\cdots\cdots x_m$ の確率函数は先天的には

$$\Phi(x_1\cdots x_m) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)^m e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_K x_K^2} \qquad (9)$$

なるが故に(7)の如き得票が起りたるとき各被選挙者の優劣度が夫々$x_1\cdots\cdots x_m$なるべき　後天確率は

$$P(x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_m \doteq \frac{\Phi\prod_K P_K^{n_K}dx_1\cdots dx_m}{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\prod_K P_K^{n_K}dx_1\cdots dx_m} \qquad (10)$$

従て

$$S(x_1\cdots x_m) = \Phi(x_1\cdots x_m)\prod_K P_K^{n_K}(x_1\cdots x_m) \qquad (11)$$

を最大ならしむる$x_1\cdots x_m$を求めて、それを以て被選挙人の最も実らしき價値と見ることが正當なり

或はx_Kの期望値

$$\bar{x}_K = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_K P(x_1\cdots x_m)dx_1\cdots dx_m \qquad (12)$$

を求め（$\overline{x_1}$、……$\overline{x_m}$）を以て最も実らしき優劣度と見ることにも合理性あり

P_kはx_1……x_mが同時に等常数だけ増しても変化なし即ち例へば

$$x_1-x_2,\ x_1-x_3, \cdots\cdots, x_1-x_m \qquad (13)$$

のみの函数なり　之等を十分小なりと見るとき即ち被選挙人の優劣　大差なしとする場合には其等の2乗以上を省略する事によって前述の計算を簡単化し得べし

2

決戦投票

今前節に於ける得票の結果が

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots\cdots \geqq n_m \qquad (14)$$

なる順序にあるものとす

$$n_1 \lessdot \frac{n}{2} \qquad (15)$$

なるときは、往々例へば最初の両人を選び其内に就て決戦投票を行ふことあり

其場合当然n_1人はX_1に　n_2人はX_2に投票すべし残りの

$$\nu = n_3 + n_4 + \cdots\cdots + n_m \qquad (16)$$

人がX_1、X_2の何れに投票するかによりて決戦の得票が定まるなり　今此ν人の中ν_1人がX_1にν_2人がX_2に投票することの確率は前節と同理にて只前節のm，nの所へ2，νを代入する迄なり　其結果を（一）をつけて表せば

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_1)^2}\,dx \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_2)^2}\,dx =$$

$$\bar{A}(x, x_1, x_2) \qquad (17)$$

$$\bar{P}_K(x, x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}h)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(x, x_1, x_2)\frac{e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_K)^2}}{\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_K)^2}\,dx}\,dx \qquad (18)$$

$$\bar{Q}(x_1, x_2) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma)^2} e^{-\frac{1}{h^2}(x_1^2+x_2^2)} \quad (K=1,2)$$

となり　求むる確率は

$$\frac{\bar{Q}\,\bar{P}_1^{\nu_1}\,\bar{P}_2^{\nu_2}\,dx_1\,dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{Q}\cdot\bar{P}_1^{\nu_1}\,\bar{P}_2^{\nu_2}\,dx_1\,dx_2} \qquad (19)$$

従て第一回の投票にて(14)の得票を得決戦投票にて両人 X_1, X_2 が夫々

$$n_1+\nu_1, \qquad n_2+\nu_2 \qquad (20)$$

なる得票をもつ確率は(10)と(19)との積なり

此積を最大ならしむる x_K 即ち

$$P_0(x_1 \cdots x_n) = \bar{Q}(x_1, x_2)\,\bar{P}_1^{\nu_1}(x_1, x_2)\,\bar{P}_2^{\nu_2}(x_1, x_2) \times$$

$$Q(x_1 \cdots x_n)\prod_K P_K^{n_K}(x_1 \cdots x_n) \qquad (21)$$

を最大ならしむる $x_1 \cdots x_n$ が此際の正当なる x_K の値

なり、其内特にx_1, x_2のみに着目し其大なる方を以て最後の當選者となすべきなり

或はx_1, x_2の期望値を求め其大小によりて當選者を決定するも可なり

何れにしても以上の慣例の如く第1回の得票数を無視して單にV_1, V_2の大小のみより當選者を定むる事は合理的にあらず

3

連記投票

2人選抜の場合に就て述べん一般性を失はずm人中より2人を選抜するに當り2名を連記して投票するものとせよ

X_kとX_lとが或人によりて選ばるゝ場合に二種あり先づX_kが第一、X_lが第二の優度をもつ如く認定さるゝ場合の確率はx_kをxと測定しx_lをxより小なるyと測定し其余のx_iを凡てy以下と測定する確率即ち

$$P_{kl}(x_1\cdots x_m)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}h}\right)^m\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{h^2}(x-x_k)^2}\left\{\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{h^2}(y-x_l)^2}\left[\prod_i \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{h^2}(z-x_i)^2}dz\right]dy\right\}dx \qquad (22)$$

同様にX_lを第一, X_kを第二と見る確率はP_{lk}なり
之を合せたる

$$Q_{kl}=P_{kl}+P_{lk} \qquad (23)$$

が即ちX_kとX_lとが選ばるゝ確率なり

連記投票を開票する場合には連記名を読み上げること普通なり従て各候補者の得票

$$\bar{n}_1,\ \bar{n}_2,\ \cdots\cdots\ \bar{n}_m \qquad (24)$$

以外にそれが如何なる組合せの連記によりて得られたるかを知れるなり　従って$\prod Q_{kl}$の形にて(24)の得票が起る確率が知らるゝ筈なり

実際には組合せを見ることなく単に(24)の結果のみを発表す　其時は同じ結果(24)を得るに當りて連記の組合せ方に種々の方法あり各方法に應じて$\prod Q_{kl}$なる式を得て其等の總和

$$\sum(\prod Q_{kl}) \qquad (25)$$

が求むる確率となる

4

投票方法の優劣

得票数の比較によりて幾名かを選抜するに當り選挙方法が幾通りもあるとき何れの方法が最も優れたるかを論究するは非常に必要なり選抜問題中の最重要点なり　其一般方針は下の如し

r人を選ぶものとせば，先づ候補者n人の優劣度が(1)の如く分布されたりとして$X_1, X_2, \cdots\cdots X_r$が当選する得票の各の場合に就て$x_1, x_2 \cdots\cdots x_r$の和の期望値

$$E(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_r) \qquad (26)$$

を求め、其等を凡ての場合に渉りて加合せたる

$$\sum E(x_1 + \cdots\cdots + x_r) \qquad (27)$$

が即ち特定人X_1……X_rが当選する場合の優劣度の総和の平均なり、此値が大なる程選挙方法が優秀なり
蓋し同一方法の選挙を繰返すとき選び得る人の價値の總和が平均に於て大なればなり

此方針に從て差当り次の三つの選挙法の優劣を比較し度き熱望を有す　即ち

n人の選挙者がm人の候補者中よりr人を選抜するに当り次の三方法を考ふ

第一法　單記投票を行ひ得票の最高点より順次r人を取りて當選者となす

第二法　r人宛の連記投票を行ひて最高点より順次r人を取る

第三法　先づ單記にて最高点者を取り残りの$m-1$人中より再び單記にて最高点者を取り進で同様にしてr回の單記投票を繰返してr人を選定す

此三法に対して優劣の判定を行ひ度きなり

2、制限連記投票

1

最近選挙法の改正に伴ひ制限連記投票を採用すべきこと決定され残る所は只連記人数の問題なりと聞く

一選挙区内の選挙人の数m、候補者の数n、当選すべき人数rに対し連記すべき人数kを如何に定むることが民意を最能く反映すべきかの問題なり

此問題を合理的に解決せんには数学的なる考察特に確率的計算を必要とすべきは何人の眼にも明瞭なるこ