從って

$$f(x,m) = A\,e^{\int \lambda(m)(x-m)\,dm}$$

但しAはmに依らないものとする。

既知の分布函数から実例を拾うと

$\lambda(m) = 1$	正規分布型
$\lambda(m) = 1/m$	Poisson 分布型, Pearson 第三型
$\lambda(m) = 1/m^2$	指数分布型,

となる。

(35) 単位円内有界正則函数の零点と角微係数に就いて。

鍋島 一郎

一 $f(z)$を$|z|<1$で正則、且つ$|f(z)|<1$とするとき、

$$D = \lim_{z\to 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \lim_{z\to 1} f'(z)$$

なるDが存在して、

$$\infty \geqq D > 0$$

なる事がcaratheodoryによって示されておる。

このDを$z=1$に於ける$f(z)$の角微係数という。

但し，$\lim_{z \to 1}$はStolzの道に沿うものとする。

以下 $|z|<1$で正則で，$|f(z)|<1$なる函数$f(z)$を考へる事にする。

$z=1$に於ける角微数の評価[1]としては，

1. $f(0)=0$ ならば $D \geqq 1$ (caratheodory)
2. $f(0)=0$; $f(z) \neq z$, $f'(0)=\rho e^{i\varphi}$

$(0 \leqq \rho < 1, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi)$

ならば，

$$D \geqq 2\,\frac{1-\rho\cos\varphi}{1-\rho^2} > 1 \text{ (Unkelback)}$$

等があるが，ここでは$f(z)$の零点によつてDを評価，それから得られる二三の事実を述べる

$\boxed{三}$ $f(z)$が$|z|<1$に零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\cdots$ をもつとし，

$$0 \leqq |z_1| \leqq |z_2| \leqq \cdots\cdots \leqq |z_n| \leqq \cdots\cdots$$

とする、

ここに重複度の数だけ同じものを数へるものとする。

定理 1 $f(z)$が$|z|<1$で正則で $|f(z)|<1$，

$f(z)$の零点を$\{z_n\}$とし，$f(z)$の$z=1$に於ける角微係数をDとすると，

$$D \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$$

である。

〔証明〕 $D=\infty$の時は明らかに成立する故，$D<\infty$とする。

---

(1) 小松勇作氏、等角写像論

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\bar{z}_i}{1-z_i} \cdot \frac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}$$

とおくと，$g(z)$ は $|z|<1$ で正則で，

$$|g(z)|<1, \qquad g(1)=1$$

であつて，Schwarz の定理により，

$$|f(z)| \leqq \left| \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z} \cdot \cdots\cdots \frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z} \right|$$

であるから，$|f(z)| \leqq |g(z)|<1$，
故に，$z=1$ に於ける $g(z)$ の角微係数を D_1 とすると Herzig の定理により

$$D \geqq D_1$$

となる。

然るに $D_1 = \lim_{z\to 1} g'(z)$

$$= \lim_{z\to 1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1-\bar{z}_i}{1-z_i} \cdot \frac{1-|z_i|^2}{(1-\bar{z}_i z)^2} \prod_{j \neq i} \frac{1-\bar{z}_j}{1-z_j} \cdot \frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z} \right.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|z_i|^2}{|1-z_i|^2}$$

となるから

$$\infty > D \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|z_i|^2}{|1-z_i|^2}$$

となり，$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1-|z_i|^2}{|1-z_i|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$

が存在して，

$$D \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$$

となる、

(注意) $f(z)$ が $|z|<1$ で正則で $|f(z)|<1$ ならば

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2} \geqq \frac{1}{D}\cdot\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

なる事が Caratheodory によって得られて居り，
$z=z_n$ とおくと，$f(z_n)=0$ 故

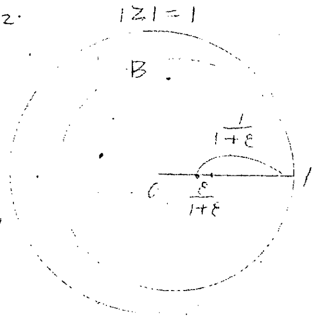
$$D \geqq \frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}.$$

となるが，定理1の方が正確である。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $f(z)$ が $|z|<1$ で正則で，$|f(z)|<1$ とし，$f(z)$ の零点を $\{z_n\}$ とする時，$z=1$ に於ける $f(z)$ の角微係数を D とすると，D が有限ならば，$z=1$ に於いて $|z|=1$ に内接する任意の円内には，高々有限個の z_n が存在する。

(証明) 定理1から

$$D > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}.$$



で $D<\infty$ 故，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2}$
が収斂し，従って $\varepsilon>0$ を任意にとり，n_0 を十分大にとると，

$$n \geqq n_0$$

に対し，

$$\frac{1-|z_n|^2}{|1-z_n|^2} < \varepsilon$$

となる。$z_n = x_n + iy_n$ とおくと，
この不等式から，

$$\left(x_n - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 + y_n^2 > \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2$$

となる。

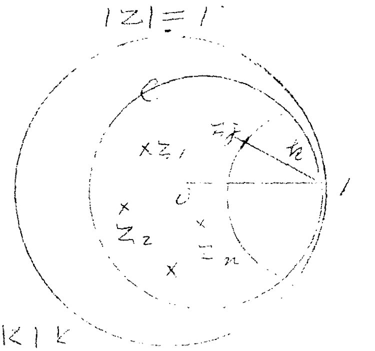
故に z_n は $z=1$ に於ける内接円 B 外にある。

依つて，始めにかゝる円 B をとれば，n_0 を十分大きくすると，$z_n\ (n \geqq n_0)$ は B 外にある。

即ち，B 内には有限個の零点が存在する。

三、定理2により，D が有限ならば，$z=1$ に於て $|z|=1$ に内接する任意の円 C 内には $f(z)$ の零点が存在しても高々有限個であるから，

今，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ なる零点が C 内に存在するものとする。



$$k = \min_i |1-z_i| = |1-z_j| \cdots\cdots ①$$

とおくとき，この k を用いて，次の評価が得られる。

定理3

$f(z)$ は $|z|<1$ で正則，$|f(z)|<1$ とし，零点を有するものとす。又，$|z|=1$ に於いて有限な角微係数 D をもつとすると，① で定めた k により

$$D \geqq \frac{4\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2}{k\left(\left|1-\log\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2 - \left|1+\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2\right)}$$

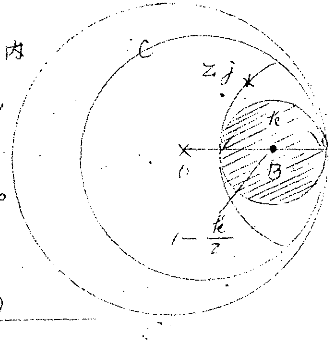
となる

(証明) $D<\infty$ 故 $f(1)=1$ と仮定

してもよい。

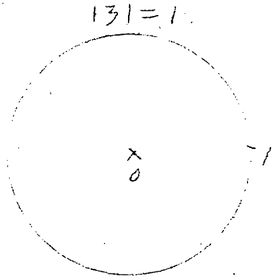
円 $|1-z|=\text{た}$ 及び $|z|=1$ に内接し、$z=1$ を通る円を B とすると、

B は円内に含まれ、た の定義から、B 内には $f(z)$ の零点が存在しない。円 B の中心は、$z=1-\frac{\text{た}}{2}$ で半径は $\frac{\text{た}}{2}$ である。



$$\zeta=\zeta(z)=\frac{z-\left(1-\frac{\text{た}}{2}\right)}{\frac{\text{た}}{2}}$$

により、B を $|\zeta|<1$ に寫像し



$$F(\zeta)=f(z(\zeta))$$

とおくと、境界に於ける角の対応により、$\zeta=1$ に至る Stolz 領域には、$z=1$ に至る Stolz 領域が対応し

$$F(1)=f(1)=1$$

であり、$F(\zeta)$ は $|\zeta|<1$ で正則で、$|F(\zeta)|<1$ 且つ、$|\zeta|<1$ に零点を有しない。

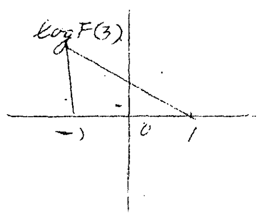
故に

$$G(\zeta)=\frac{1+\log F(\zeta)}{1-\log F(\zeta)}$$

とおくと、($\log F(\zeta)$ は $-\pi<\arg F(\zeta)\leqq\pi$ とする)

$$R\log F(\zeta)=\log|F(\zeta)|<0$$

$$(|F(\zeta)|<1\text{ 故})$$



であるから

:

$$|G(\zeta)| = \left|\frac{1+\log F(\zeta)}{1-\log F(\zeta)}\right| < 1$$

で，$G(\zeta)$ は $|\zeta|<1$ で正則で，

$$G(1) = 1$$

である

故に $\zeta=1$ に於ける $G(\zeta)$ の角微係数を D_1 とすると，

$$D_1 = \lim_{\zeta\to 1} G'(\zeta) = \lim_{\zeta\to 1}\left(\frac{\frac{f'(z)}{f(z)}\times 2}{(1-\log f(z))^2}\times\frac{dz}{d\zeta}\right)$$

となり，

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{k}{2}\,;\ \lim_{z\to 1} f'(z) = D\ ,\ f(1) = 1$$

であるから，

$$D_1 = 2\times\frac{k}{2}\times D = k\,D \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．

次に，$w(\zeta) = \dfrac{1-\overline{G(0)}}{1-G(0)}\cdot\dfrac{G(\zeta)-G(0)}{1-\overline{G(0)}\,G(\zeta)}$

とおくと，$w(\zeta)$ は $|\zeta|<1$ で正則で，

$$w(0) \fallingdotseq 0\ ,\ |w(\zeta)|<1,\ w(1)=1$$

となる。

又，$\zeta=1$ を頂点とする Stolz 領域に於て，$w'(\zeta)$ が正則で，その境界を含めて連續であるから，そこで有界な上界 M を有し，

$$|1-w(\zeta)| \leqq \int_{\zeta}^{1} |w'(\zeta)||d\zeta| \leqq M\,|1-\zeta|$$

となる。積分は ζ から 1 までの線分をとる。

故に，Caratheodory の定理により，$w(\zeta)$ は $\zeta=1$ に

於て有限な角微係数 D_2 を有し

$$D_2 \geqq 1$$

である。

故に、$1 \geqq D_2' = \lim_{z \to 1} w'(z)$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1-\overline{G(0)}}{1-G(0)} \frac{1-|G(0)|^2}{(1-\overline{G(0)}G(z))^2} \cdot \frac{dG(z)}{dz}$$

$$= \frac{1-|G(0)|^2}{|1-G(0)|^2} \lim_{z\to 1} G'(z)$$

$$\doteqdot \frac{1-|G(0)|^2}{|1-G(0)|^2} D_1$$

①を代入して、

$$1 \leqq \frac{1-|G(0)|^2}{|1-G(0)|^2} k D$$

故に、

$$D \geqq \frac{|1-G(0)|^2}{k(1-|G(0)|^2)} \text{ --------- ②}$$

となる、

然るに、$G(0) = \frac{1+\log F(0)}{1-\log F(0)} = \frac{1+\log f(1-\frac{k}{2})}{1-\log f(1-\frac{k}{2})}$

なるにより、

$$\frac{|1-G(0)|^2}{1-|G(0)|^2} = \frac{4|\log f(1-\frac{k}{2})|^2}{|1-\log f(1-\frac{k}{2})|^2-|1+\log f(1-\frac{k}{2})|^2}$$

となる。

故に ② から

$$D \geqq \frac{4|\log f(1-\frac{k}{2})|^2}{k(|1-\log f(1-\frac{k}{2})|^2-|1+\log f(1-\frac{k}{2})|^2)}$$

となり証明される。

(証 終)

又，この定理から次の定理が得られる。

$\boxed{\text{定理 4}}$　定理３と同じ假定の下に，

$$\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

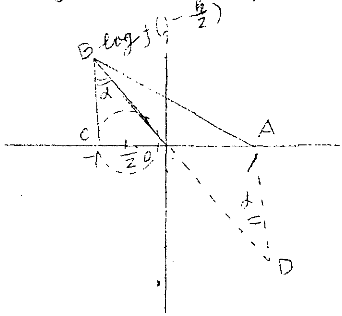
ならば

$$D \geqq \frac{1}{k}$$

となる。

〔証明〕 $\mathcal{R}\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)=\log\left|f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|<0$

であるから，



$AB=\left|1-\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|$

$BC=\left|1+\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|$

$BO=\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|$

とおき，BO を延長し，

$OD=OB$

ならしめると，

$BD=2\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|$

となり，　$\angle ADB=\angle OBC=\alpha$

とおくと，

$$AB^2=BD^2+AD^2-2\,BD\cdot AD\cos\alpha$$

$$AB^2-BC^2=AB^2-AD^2=BD^2-2\,BD\cdot AD\cos\alpha$$

故に，点B，即ち $\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)$ が $-\frac{1}{2}$ を中心とし半径 $\frac{1}{2}$ の円内になければ，

即ち $\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$

ならば

$$|\alpha| \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{故に} \quad \cos\alpha \geqq 0$$

となり，

$$AB^2 - BC^2 \leqq BD^2$$

即ち $\left|1-\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2 - \left|1+\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2 \leqq 4\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right|^2$

となる。

故に定理3により

$$D \geqq \frac{1}{k}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証終）

〔注意〕

$\infty > D$ とし，

(1)　$\left|f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| \leqq \frac{1}{e}$

(2)　$\left|\arg f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}$

(3)　$\left|\arg f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| \leqq \frac{1}{2}$ であって

且つ，$\left|f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| \leqq \exp.\frac{-1-\sqrt{1-4\theta^2}}{2}$

又は $\left|f\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| \geqq \exp.\frac{-1+\sqrt{1-4\theta^2}}{2}$

（但し，$\theta = \arg f\left(1-\frac{k}{2}\right)$）

の三つのいずれかの場合を $f\left(1-\frac{k}{2}\right)$ が万足すれば，

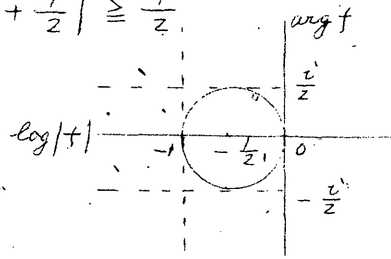
定理4の仮定

$$\left|\log f\left(1-\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

を万足するから，

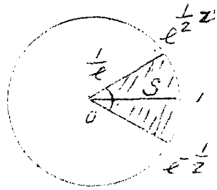
$$D \geqq \frac{1}{k}$$

となる。



又 $w=f(z)$ の値域が

領域 $S \left(\begin{array}{l} |w| > \frac{1}{e} \\ |\arg w| < \frac{1}{2} \end{array} \right)$



と共通点を有しなければ，

上の (1)，(2) のいづれかを

万足するから，

$$D \geqq \frac{1}{k}$$

となる。

尚 [三] の最初に述べた如く，

$$k = \min_i |1 - z_i|$$

であるから，

$$D \geqq \frac{1}{k}$$

となる場合には，

$$D \geqq \frac{1}{k} \geqq \frac{1}{|1-z_i|} > \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となる。

$\boxed{四}$ 次に定理3，4から次の事が云はれる。

$\boxed{定理5}$ 定理3の仮定の下に

$$\left|\log f(a) + \frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}, \quad 1 > a \geqq 1 - \frac{k}{2}$$

を万足する実数 a が存在すれば

$$D \geqq \frac{1}{2(1-a)} \geqq \frac{1}{k}$$

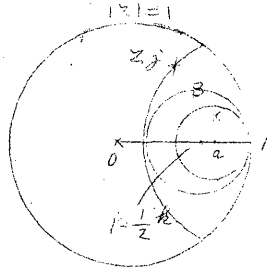
となる。

〔証明〕 定理3の証明に用ひた円

B内に $f(z)$ の零点が存在せず

Bの中心は $z = 1 - \frac{k}{2}$ である

から　$1 > a \geqq 1 - \frac{k}{2}$



なる点 a を中心とし $|z|=1$ に内接する円 K 内にも $f(z)$ の零点は存在しない。

故に B の代りに K を用ひれば、定理3の証明と同様にして、k の代りに $2(1-a)$、$1-\frac{k}{2}$ の代りに a とおいた結果を得る。

故に

$$\left|\log f(a) + \frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

ならば、定理4より

$$D \geqq \frac{1}{2(1-a)} \geqq \frac{1}{k}$$

となる。　　　　　　　　　　　　　（証終）

〔注意〕 $\left|\log f(a_n) + \frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$, $a_n \to 1$

なる点列 $\{a_n\}$ が存在すれば

$$\frac{1}{2(1-a)} \longrightarrow \infty$$

となるから $D < \infty$ の時にはかゝる点列が存在しない事が分る。

$\boxed{五}$ 以上では、k の定義は、$D < \infty$ の時、$z=1$ に於ける内接円 C 内にある有限個の零点

$$z_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

により

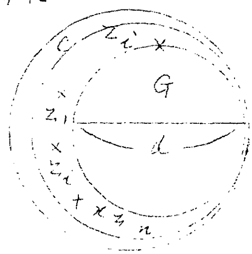
$$k = \min_i |1 - z_i|$$

として定めた数である。

そして定理3の証明中，円Bを用ひたのは，円B内に $f(z)$

の零点が存在しない事を利用する爲であった。

然るに，$z=1$ に於ける内接円の内に $f(z)$ の零点が存在しなければ，より小さい内接円内にも存在しないから，かかる円の内最大のもの G が存在する。この円 G の直径を d とすると，定理3の証明中，円Bの代りに円 G を用ひてもよいから，定理3, 4, 5に於て，δ の代りに d を用ひてもそのまゝ成立する。



即ち

定理6 $f(z)$ が $|z|<1$ で正則 $|f(z)|<1$ とし，零点を有し，$z=1$ に於いて有限な角微係数をもてば，$z=1$ に於ける内接円の中，$f(z)$ の零点を含まない最大の円の直径を d とすると，

$$D \geqq \frac{4\left|\log f\left(1-\frac{d}{2}\right)\right|^2}{d\left(\left|1-\log f\left(1-\frac{d}{2}\right)\right|^2-\left|1+\log f\left(1-\frac{d}{2}\right)\right|^2\right)}$$

となる。

定理7 同じ假定の下に

$$\left|\log f\left(1-\frac{d}{2}\right)+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

ならば，
$$D \geqq \frac{1}{d}$$

定理8 同じ假定の下に

$$\left|\log f(a)+\frac{1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}, \quad 1>a \geqq 1-\frac{d}{2}$$

を満足する実数 a が存在すれば，

$$D \geqq \frac{1}{2(1-a)} \geqq \frac{1}{d}$$

となる。　　　　　　(22, 10, 13)