二次形式統計量の独立性に就て

所員 小川潤次郎

はしがき

W.G.Cochran[1]は1934年に一変量正規母集團から独立に取られた大いさNの標本値から作られた二次形式統計量の独立性判定條件を其等二次形式の係数行列の階数(Rang)間の関係として與へ、これが所謂Cochranの定理と呼ばれてゐる。[2] 其後A.T.Craig[3]が1938年に同じ定理を述べて證明してゐる。

處が應用上ある行列の階数を定めることが必ずしも常に容易ではないので坂元平八氏[4]は二次形式統計量の独立性判定條件として係数行列の直交性を以てされた。

本論文に於ては Cochran, Craig の條件を幾分拡張しそれと坂元の條件とがequivalentであることを示し全体としてより統一的な見地から證明を簡潔化することを試みる。

---

(1) W.G.Cochran: The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 30, 1934.

(2) S.S. Wilks: Mathematical Statistics. 1943. p.107.

(3) A.T. Craig: On the independence of certain estimates of variance. Annals of Mathematical Statistics, Vol 9, 1938.

(4) 坂元平八: 統計量の独立性に就て 統計数理研究所, 講究錄, 第一巻第九号.

以下に用ひる記号術語に関しては上記坂元の論文及び下記二書を参照せられ度し。

Sperner-Schreier: Vorlesungen über die Theorie der Matrizen, 1932

Sperner-Schreier: Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. Zweiter Band. 1935

§1. 定理

定理 1. (Cochran, Craig の定理の拡張)(1)

ベクトル $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

$$f(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(V^{-1}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})}d\mathfrak{x}$$

但し V は Variance Matrix, $d\mathfrak{x}=dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n$

なる同時分布法則に従ふものとするとき, $\mathfrak{x}$ より作れる s 個の統計量

$$Q_i=(A_i\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x}),\quad i=1,2,\cdots,s$$

茲に A_i は n 次の対称行列

が互に独立なる為に必要にして且充分なる條件は

$$\sum_{i=1}^{s} A_i=B \qquad とするとき$$

$A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 及び B の階数を夫々 $r_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 及び R とするとき

$$\sum_{i=1}^{s} r_i=R$$

が成立つことである。

定理2.(坂元の定理)(2)

定理1の條件の下に於て

$\sum_{i=1}^{s} r_i = R$ は次の條件と等値である即ちs個の二次形式統計量$Q_i\ (i=1,2,\cdots,s)$が互に独立なる爲に必要且充分な條件は

$$A_i V A_j = 0 \quad i \neq j,\ i,j=1,2,\cdots,s$$

である。

定理3.(3) 定理1の條件の下に$Q=(A\varphi\cdot\varphi)$が自由度fのχ^2-分布をなす爲に必要且充分な條件は

$$AVA=A$$

で且つ行列Aの階数がfなることである。

定理4.(4) 定理1に於て統計量$Q(B\varphi\cdot\varphi)$が自由度Rのχ^2-分布をなすならばそのときは$Q_i=(A_i\varphi\cdot\varphi)$, $i=1,2,\cdots,s$は夫々自由度r_i, $i=1,2,\cdots,s$のχ^2-分布をなす。

---

(1) W.G.Cochran; The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.30, 1934;
A.T.Craig; On the independence of certain estimates of variance, Annals of Mathematical Statistics, Vol.9, 1938.
S.S.Wilks; Mathematical Statistics, 1943, P.107

(2) 坂元平八;統計量の独立性に就て―統計数研究所,講究録 第一巻第九号,
増山元三郎;少数例の纏め方と実験計画の立て方 (第二版)、P.114.

(3) 坂元平八;統計量の独立性に就て―統計数理研究所 講究録 第一巻第九号,

(1) 坂元平八：統計量の独立性に就て ―― 統計数理研究所 講究録，第一巻，第九号

§2. 補助定理

以上の諸定理を証明する為に次に幾つかの補助定理を述べる。

Lemma 1. 統計量 $\theta=(A\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})$ の特性函数 (characteristic function) を $\varphi(t)$ とすれば

$$\varphi(t)=|E-2itA^*|^{-\frac{1}{2}}$$

の形となり，A^* は対称行列である。

證明：

$$\varphi(t)=\int_{R(\mathfrak{x})} e^{it\theta}f(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}\int_{R(\mathfrak{x})} e^{it(A\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})-\frac{1}{2}(V^{-1}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})}\,d\mathfrak{x}$$

ここで $(V^{-1}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})$ は正値二次形式だから適当な直交行列 T を選ぶことに依つて

$$T^{-1}V^{-1}T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_i>0,\quad i=1,\cdots,n$$

の形に変換出来る。此の変換に依る Jacobian は 1 だから

$$T^{-1}AT=\tilde{A}$$

とおけば

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}\int_{R(\mathfrak{x})} e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2-2it(\tilde{A}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})]}\,d\mathfrak{x}$$

此處で $\sqrt{\lambda_i}\,x_i=y_i$

$$\text{即ち}\quad \mathfrak{y}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{x}\equiv\Lambda^{-1}\cdot\mathfrak{x}$$

なる変換を行へば，その Jacobian は $|\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}|$ だから

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}|\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}|^{-1}\int_{R(y)} e^{-\frac{1}{2}[(y\cdot y)-2it(\Lambda'\tilde{A}\Lambda y\cdot y)]}dy$$

$|V^{-1}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ であるから

$A^*=\Lambda'\tilde{A}\Lambda$ とおいて

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\int_{R(y)} e^{-\frac{1}{2}[(y\cdot y)-2it(A^*y\cdot y)]}dy$$

處で A^* も亦対称行列であるから適当な直交行列 S で変換して対角線型に直せる。
即ち $y=Sz$ とすれば

$$S^{-1}A^*S=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{pmatrix}$$

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\int_{R(z)} e^{-\frac{1}{2}[(z\cdot z)-2it(S^{-1}A^*Sz\cdot z)]}dz$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2it\sigma_1)z_1^2}dz_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2it\sigma_2)z_2^2}dz_2\cdots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2it\sigma_n)z_n^2}dz_n$$

$$\sqrt{1-2it\sigma_i}\cdot z_i=\zeta_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

とおくと

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}[(1-2it\sigma_1)\cdots(1-2it\sigma_n)]^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta_i^2}d\zeta_i$$

$$=[(1-2it\sigma_1)\cdots(1-2it\sigma_n)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=|E-2itS^{-1}A^*S|^{-\frac{1}{2}}=|E-2itA^*|^{-\frac{1}{2}}$$

Q. E. D.

Lemma 2. s 個の統計量 $\theta_i=(A_ix\cdot x)$, $i=1,2,\cdots,s$ が互に独立である為の必要且つ充分なる條件は, θ_i の特性函数を $\varphi(t_i)$ と

するとし $Q_1, \cdots, Q_s$ の同時分布の特性函数を $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_s)$ とするとき

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_s) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdots\varphi(t_s)$$

なることである。

Lemma 3. Lemma 1, 2, に依って s 個の二次形式統計量

$$Q_i = (A_i\varphi, \varphi) \quad i = 1, 2, \cdots, s$$

が互に独立なる為に必要にして且つ充分なる條件は $t_1, t_2, \cdots, t_s$ のすべての実数値に対して

$$|E - 2it_1A_1^* - \cdots - 2it_sA_s^*| = \prod_{j=1}^{s} |E - 2it_jA_j^*|$$

が成立つことである。

Lemma 4. $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ を n 次の対稱行列とするとき

$\sum_{i=1}^{s} A_i = B$ として

$$|E - tB| = \prod_{i=1}^{s} |E - tA_i|$$

が t のすべての実数値に対して成立すれば

$$R = \sum_{i=1}^{s} r_i$$

である。但し $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ 及 B の階数を夫々 $r_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ 及 R とする。

證明：$t = \frac{1}{x}$ とおくと條件式は

$$x^{(s-1)n}|xE-B| = \prod_{i=1}^{s}|xE-A_i|$$

となる。依って両辺の Nullfaktor の数を算へて $(s-1)n+b = \sum_{i=1}^{s} a_i$ となる。但し $|xE-A_i|$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 及 $|xE-B|$ の Nullfaktor の数を夫々 a_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 及び b とする。$sn+b = n+\sum_{i=1}^{s} a_i$

故に $\sum_{i=1}^{s}(n-a_i) = (n-b)$

處で小川・坂元氏の補助定理の代数的証明[1]に依れば対称行列をある n 次元の線形ベクトル集合体の一次変換と考へたときその一次変換の零点集合(Nullstellengebilde)の次元がその行列の特有行列の Nullfaktor の数であり又 n から零点集合の次元を減じたものがその行列の階数である。従って上式は

$$R = \sum_{i=1}^{s} r_i$$

と書直すことが出来る。

Lemma 5. n 次の対称行列 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ の階数 r_i, $(i=1,2,\cdots,s)$ とし $\sum_{i=1}^{s} A_i = B$ の階数 R とするとき

$$\sum_{i=1}^{s} r_i = R$$

(χ^2 分布ナルコト)

で且つ B が idempotent ならば　$B^2=B$

$$A_i^2 = A_i,\ A_iA_j = 0,\ i \neq j.$$

である。

---

(1) 統計数理研究所，講究録 第一巻，第二五号

證明：第1段 $s=2$. とする。

A_1, A_2 及び $A_1+A_2=B$ を n 次元の線型ベクトル集合体 $\mathfrak{L}$ の一次変換と考へて A_1, A_2 及び B の零点集合 (Nullstellungsgebilde) を夫々 $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ 及び $\mathfrak{N}$ とすれば $\mathfrak{L}$ は次の如く三通りの直和分解が可能である。

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}_1=\mathfrak{M}_2+\mathfrak{N}_2=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}. \quad (1)$$

前記小川の論文に依れば $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 及び $\mathfrak{M}$ の次元が夫々 r_1, r_2 及び R であり $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ 及び $\mathfrak{N}$ の次元は夫々 $n-r_1$, $n-r_2$ 及び $n-R$ である。

拠て

$$\dim(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\dim(\mathfrak{N}_1)+\dim(\mathfrak{N}_2)-\dim(\mathfrak{N}_1\wedge\mathfrak{N}_2) \quad (2)$$

であって

$\mathfrak{x}\in\mathfrak{N}_1\wedge\mathfrak{N}_2$ ならば $A_1(\mathfrak{x})=0, A_2(\mathfrak{x})=0$

だから $B(\mathfrak{x})=A_1(\mathfrak{x})+A_2(\mathfrak{x})=0$ となって

$$\mathfrak{x}\in\mathfrak{N}$$

即ち $\mathfrak{N}\geqq\mathfrak{N}_1\wedge\mathfrak{N}_2$ であるから

$$\dim(\mathfrak{N})=n-R\geqq\dim(\mathfrak{N}_1\wedge\mathfrak{N}_2) \quad (3)$$

(2) 及び (3) 式より

$$\dim(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)\geqq n-r_1+n-r_2-(n-R)=n \quad (4)$$

處で $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)$ は $\mathfrak{L}$ の部分集合体だから (4) より

$$\dim(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = n$$

即ち　$\mathfrak{L} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ (5)

となる。(5)は $A_1A_2 = A_2A_1 = 0$ なることを示す。又(5)は

$$\mathfrak{M}_1 \wedge \mathfrak{M}_2 = 0 \qquad (6)$$

と等値である。

次に $B^2 = B$ ならば $\mathfrak{L}$ の凡べてのベクトル φ に対して

$$A_1^2(\varphi) + A_2^2(\varphi) = A_1(\varphi) + A_2(\varphi)$$

又は

$$A_1(A_1(\varphi) - \varphi) = A_2(-A_2(\varphi) + \varphi) \qquad (7)$$

(6)の $\mathfrak{M}_1 \wedge \mathfrak{M}_2 = 0$ なることから(7)より

$$A_1^2(\varphi) = A_1(\varphi),\ A_2^2(\varphi) = A_2(\varphi) \qquad (8)$$

(8)は即ち A_1, A_2 が idem potent なることを示す。

第二段　s が一般の場合には完全帰納法に依つて証明する。即ち $s-1$ 個の行列に関しては定理は成立するとして、s の場合に証明すればよい。

その為には s 個の行列 $A_i, i=1,2,\cdots,s$ の階数 $r_i, i=1,2,\cdots,s$ の和が $B = \sum_{i=1}^{s} A_i$ の階数 R に等しいとき $s-1$ 個の行列の和 $B' = \sum_{i=1}^{s-1} A_i$ の階数を R' として

$$R' = \sum_{i=1}^{s-1} r_i$$

なることを云へばよい。

故て $B'+A_s=B$ であるから，階数に関しては

$$R'+r_s \geqq R \tag{9}$$

又一方 $B'=\sum_{i=1}^{s-1} A_i$ であるから

$$R' \leqq \sum_{i=1}^{s-1} r_i = R-r_s \tag{10}$$

(9) と (10) から

$$R'=R-r_s=\sum_{i=1}^{s-1} r_i$$

証明終り

§3. 定理の證明

(定理 1 の証明)

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s$ の joint distribution の特性函数を求めると

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_s)=\int_{R(\mathfrak{x})} f(\mathfrak{x})\, e^{it_1\theta_1+it_2\theta_2+\cdots+it_s\theta_s}\, d\mathfrak{x}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}\int_{R(\mathfrak{x})} e^{-\frac{1}{2}\left((V^{-1}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})-i\sum_{\nu=1}^{s} t_\nu (A_\nu\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})\right)}\, d\mathfrak{x}$$

Lemma 1 と同様の計算に依って

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_s)=|E-2it_1A_1^*-\cdots-2it_sA_s^*|^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

但し A_i^* は対稱行列である。θ_i $i=1,2,\cdots,s$ の特性函数は同様にして

$$\varphi(t_\nu)=|E-2it_\nu A_\nu^*|^{-\frac{1}{2}} \quad \nu=1,2,\cdots,s \qquad (2)$$

従って Lemma 2 に依って $\theta_1,\cdots,\theta_s$ が独立なる為の必要且充分條件は

$$|E-2it_1A_1^*-\cdots-2it_sA_s^*|=\prod_{\nu=1}^{s}|E-2it_\nu A_\nu^*| \qquad (3)$$

従って Lemma 4 より

$$R=\sum_{i=1}^{s} r_i$$

が必要充分條件であることが分る。處が
?
$BVB=B$ ならば $\sum_{i=1}^{s}A_i^*=B^*$ とすれば $B^{*2}=B^*$ であるから $R=\sum_{i=1}^{s} r_i$ な Lemma 5 に依って $A_i^{*2}=A_i^*$, $A_i^*A_j^*=0$, $i\neq j$ 従って (3) が成立つ。

証明終り

Lemma 2 の 2)

(定理2の証明)

定理1の証明で明かである。

(定理3の証明)[1] $\theta=(A\varphi\cdot\varphi)$ が自由度 f の χ^2-分布をなすならば其の特性函数 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=\int e^{it\theta}\frac{1}{2^{\frac{f}{2}}\Gamma(\frac{f}{2})}(\theta)^{\frac{f}{2}-1}e^{-\frac{\theta}{2}}d(\theta)$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{f}{2}}\Gamma(\frac{f}{2})}\int_0^\infty e^{it(\theta)-\frac{\theta}{2}}(\theta)^{\frac{f}{2}-1}d(\theta)$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{f}{2}}\Gamma(\frac{f}{2})}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-2it)\theta}\theta^{\frac{f}{2}-1}d\theta$$

$\frac{1}{2}(1-2it)Q=\zeta$ とおけば

$$\varphi(t)=\frac{2^{\frac{1}{2}}(1-2it)^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{f}{2}}\Gamma(\frac{f}{2})}\int_0^{\infty}\zeta^{\frac{f}{2}-1}e^{\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{(1-2it)^{f/2}}$$

となりSolomon Kullback[(2)]に依れば逆に$\varphi(t)=(1-2it)^{-f/2}$なるときの分布は$\chi^2$-分布となる。

然るにLemma 1の證明と同様にして

$$\varphi(t)=|E-2itA^*|^{-\frac{1}{2}}$$

であるからA^*の特有根を$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$とすれば

$$\varphi(t)=\prod_{\nu=1}^{n}(1-2it\alpha_\nu)^{-\frac{1}{2}}=(1-2it)^{\frac{f}{2}}$$

がtの如何に係らず成立しなければならぬ。その爲には

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_f=1$$
$$\alpha_{f+1}=\cdots=\alpha_n=0$$

である筈である。

---

(1) 坂元平八；統計量の独立性に就て
統計数理研究所講究録，第一巻，第九号

(2) Solomon Kullback; An application of characteristic function to the distribution problems of statistics.
The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 5, 1943.

處が A^* は対称行列であるから適当な直交行列 S を取って

$$S'A^*S = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\} f & 0 \\ 0 & \left.\begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}\right\} n-f \end{pmatrix}$$

の形となる。従って

$$S'A^*SS'A^*S = S'A^*S$$

$$\text{故に}\quad A^{*2} = A^*$$

茲に $A^* = \Lambda'\hat{A}\Lambda = \Lambda'T^{-1}AT\Lambda$ であるから

$$A^{*2} = \Lambda'T^{-1}AT\Lambda\Lambda'T^{-1}AT\Lambda$$

$\Lambda' = \Lambda$ であるから

$$\Lambda\Lambda' = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

處で

$$T^{-1}V^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

であったのだから

$$T\Lambda\Lambda'T^{-1} = V$$

となり

$$\Lambda'T^{-1}AVAT\Lambda = \Lambda'T^{-1}AT\Lambda$$

となるから

$$AVA = A$$

を得る。

(定理4の証明)

定理2及び定理3から明かである。

本論文は坂元所員の示唆に依って出来たものであることを附記して同所員に深甚なる感謝を表明します。