論文紹介 6、

Abraham Wald: Some generalization of The Theory of Cumulative Sums of Random Variables
Annals of Math. Statistics. vol 16

所員　坂元平八

1、豫備的説明　著者 Wald ハ前ニ

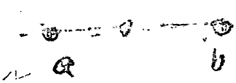
"On cumulative sums of random variables," Annals of math. Stat, vol 15, PP. 283—296
（紹介者未見）

ト題スル論文デ次ノ様ナ問題ヲ取扱ツテ居ル

今 $\{Z_i\}$ $(i=1, 2, \cdots ad\ inf.)$ ヲ (Ω, F, P) 註1 上デ定義サレタ同一分布ヲ持ツ独立ナ実確率変数デアルトスル。今 a ヲ一ツノ与ヘラレタ正ノ常数トシ b ヲ一ツノ与ヘラレタ負ノ常数トシ n ヲ

(1)　$Z_1+Z_2+\cdots+Z_n \geq a$ カ

(2)　或ハ $Z_1+Z_2+\cdots+Z_n \leq b$



ガ成リ立ツ様ナ最小ノ正ノ整数トスル

Wald ノ前論文デ取扱ハレタ主ナ問題ハ

(1)　ゴトCumulative sum ガ境界 b ニ到達シナイ前ニ境界 a ニ達スル確率ヲ求メルコト

(2)　n ノ特性函数ト分布函数ヲ求メルコト

デアツタ

仮本論文デハ前論文ヲ更ニ一般的ニ取扱ツテ議論ヲ進メテ居ル。今 $K=\{K_i(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i)\}$ $(i=1, 2, \cdots ad\ inf)$ ヲ一ツノ与ヘラレタ函数列（正確ニハ可測函数列）トシ n ヲ

(3)　$K_n(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) \geq 1$ カ

(4)　或ハ $K_n(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) \leq -1$

ガ成リ立ツ様ナ最小ノ正ノ整数トスル

special ノトキ: sum ノ時

今函数列 K ニツイテハ $n<\infty$ ニナル様ナ確率ガ

Iニ等シクナケレバナラヌトイフ以外ニ何ラノ制限モナイ。本論文ノ目的ハ $K_n(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) \geq 1$ ナル確率ニ関スル若干ノ定理及ビnノ平均値(註2)ニ関スル若干ノ定理ヲ出スコトニアル。勿論コノ文デ formulate サレタ問題ハ前論文ヲ一般的ニ取扱ッタモノデアル。何トナレバ前論文ノ場合ハ本論文ニ於テ $K_i(Z_1, \cdots, Z_i) = \frac{2}{a-b}(Z_1 + \cdots + Z_i) - \frac{a+b}{a-b}$

トオイタモノニ他ナラヌカラ。

——o——

(註1) 伊藤清著：確率論ノ基礎「第三章確率空間ノ構成」ノ処参照

(註2) nモ確率変数デアルコト・後ニ説明スル

(紹介者註) 本論文ハ説明ガ非常ニ簡略デアル為紹介者ガ補足説明シタ処ガ多イ

——o——

2. Z ノ Conjugate distribution

今 Z ヲ (Ω, F, P) 上デ定義サレタ一ツノ実確率変数トシソノ distribution ハ Z_iノ common distribution ニ等シイモノトスル。本節デ Z ノ conjugate distribution ナル概念ヲ導入シヤウ。コノ概念ハ後デ用ヰラレルモノデアル。Wald ノ前論文ノ補助定理2ニヨレバ Z ノ分布ニ若干弱イ制限ヲツケレバ

(5) $\quad E(e^{Zh_0}) = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{zh_0} dF(z) = 1$

ナル如キ $h_0 \neq 0$ ナル唯一ツノ実数ガ存在スル。コゝニ $E(u)$ハ或確率変数 u ニ対スル u ノ平均値ヲ示スモノトスル。

説明ノ便宜ノタメニ、Z ハ到ル処デ確率密度ヲ有スル連続分布 continuous distribution ヲ持ッ

$$g(x) = \int_{-\infty} f_Z(y)\,dy,\quad \int_{-\infty} f_Z^*(x)\,dx = \int e^{x t_0} f_Z(x)\,dx = 1.$$

カ或ハ discrete distribution ヲ持ツモノトスル依ツテ以下 Z ノ Probability distribution $f_Z(x)$ トハ Z ノ distribution ガ連続ナル場合ニハ Z ノ Probability density ヲ意味シ Z ノ分布ガ discrete ナ場合ニハ $f_Z(x)$ ハ確率変数 Z ガ x ナル値ヲトル確率ヲ意味スルモノトスル　(5) カラ (adjoint)

(6) $\quad f_Z^*(x) = e^{x t_0} f_Z(x)$

ハ一ツノ確率分布ナルコトガ云ヘル。$f_Z^*(x)$ ヲ Z ノ conjugate distribution ト云フ。或実確率変数 u ニ対シテ $E^*(u)$ ヲ Z ノ分布ガ $f_Z^*(x)$ ニテ与ヘラレルト云フ仮定ノ下ニ於ケル u ノ平均値ヲ示スモノトスル、コノ Z ハ新シイ (Ω, F, P^*) 上デ定義サレタ確率変数ト考ヘルベキデアラウ。

平均値 $E(u)$ 及ビ $E^*(u)$ ハ函数列 $\underline{K} = \{K_i(Z_1, ---, Z_n)\}$ $(i = 1, 2, ---$ ad inf.$)$ ニ depend スル場合ガアル。コノ時ハ[illegible]ニ夫々 $E(u\,|\,\underline{K})$ 及ビ $E^*(u\,|\,\underline{K})$ デ示スコトニスル。

3. 二ツノ定理

次ニ二ツノ定理ヲ述ベル。ソノ一ツハ $K_n(Z_1, --- Z_n) \geq 1$ ナル Prob. ニ関スルモノデ他ハ n ノ平均値ニ関スルモノデアル。以下 E_1, E_2, E_1^*, E_2^* ヲ夫々以下ノ如ク定義スル。

Z ノ分布ガ $f_Z(x)$ デ与ヘラレテヰル場合即チ Z ガ (Ω, F, P) デ定義サレテヰル時

$E_1 =$ Conditional expected value under restriction that $K_n(Z_1, --- Z_n) \geq 1$

$E_2 =$ Conditional expected value under restriction that $K_n(Z_1, --- Z_n) \leq -1$

Z ノ分布ガ $f_Z^*(x)$ デ与ヘラレテヰル場合、即チ Z

が(Ω, F, P^*)デ定義サレテヰル時
$E_1^* =$ Conditional expected value under restriction that $K_n(Z_1 --- Z_n) \geq 1$
$E_2^* =$ Conditional expected value under restriction that $K_n(Z_1 --- Z_n) \leq -1$

定理1　$\mathrm{K} = \{K_i(Z_1 --- Z_i)\}$ヲ$n < \infty$ナルProb.がdistributionが$f_Z(x)$, $f_Z^*(x)$ニテ与ヘラレル$\{Z_i\}$ $(i = 1, 2, -- ad\,inf.)$ニ対シテ1ニ等シイ様ナ函数列トスル。γヲZノ分布が$f_Z(x)$デ与ヘラレタ場合ノ$K_n(Z_1, --, Z_n) \geq 1$ナルProb.ヲ示シγ^*ヲZノ分布が$f_Z^*(x)$デ与ヘラレタ場合ノ同ジeventノProb.ヲ示スモノトスル。然ル時ハ

$$(7)\quad E_1(e^{Z_n h_0} | \mathrm{K}) = \frac{\gamma^*}{\gamma} ; \quad E_2(e^{Z_n h_0} | \mathrm{K}) = \frac{1-\gamma^*}{1-\gamma}$$

及ビ

$$(8)\quad E_1^*(e^{-Z_n h_0} | \mathrm{K}) = \frac{\gamma}{\gamma^*} ; \quad E_2^*(e^{-Z_n h_0} | \mathrm{K}) = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^*}$$

が成立スル。コヽニ$Z_n = Z_1 + ---- + Z_n$デアルトスル

[証明](註3)　今

$$A_n^{(1)} = \underset{\omega}{E}\left\{ \bigcap_{i=1}^{n-1} (-1 < K_i(Z_1, ---, Z_i) < 1) \cap (K_n(Z_1, --- Z_n) \geq 1) \right\}$$

$$A_n^{(2)} = \underset{\omega}{E}\left\{ \bigcap_{i=1}^{n-1} (-1 < K_i(Z_1 --, Z_i) < 1) \cap (K_n(Z_1 --- Z_n) \leq -1) \right\}$$

トオキ

$$A^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}, \quad A^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)}, \quad A_n = A_n^{(1)} + A_n^{(2)}$$　ナリトスル

然ル時　$A_n^{(1)}$ノ如キsetヲtype 1ノsetト云ヒ、$A_n^{(2)}$ノ如キsetヲtype (2)ノsetト云フ。尚$A_n^{(1)}$ $(n = 1, 2, ---)$, $A_n^{(2)}$ $(n = 1, 2 ---)$ハ何レノ二ツモ共通点ヲ

(註3)　前記伊藤氏著書ノ記号参照サレタシ

持タヌ。

仮 $n(\omega)$ 及ビ $Z_n(\omega)$ ヲ夫々次ノ如ク定義スル

$$n(\omega) = K \quad \text{for} \quad \omega \in A_K \quad (K=1,2,\cdots \text{ad. inf.})$$

及ビ

$$Z_n(\omega) = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_K \quad \text{for} \quad \omega \in A_K \quad (K=1,2,\cdots \text{ad. inf.})$$

然ル時 n, Z_n ハ (Ω, F, P) 或ハ (Ω, F, P^*) 上ノ実確率変数デアル(註4)

仮定理ニ依リ $\gamma = P_\gamma(A^{(1)})$, $\gamma^* = P_\gamma^*(A^{(1)})$ デアリ 且

$$P_\gamma(n < \infty) = P_\gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

$$P_\gamma^*(n < \infty) = P_\gamma^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$ デアルカラ

$$P_\gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P_\gamma(A^{(1)} + A^{(2)}) = P_\gamma(A^{(1)}) + P_\gamma(A^{(2)}) = 1$$

$$P_\gamma^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P_\gamma^*(A^{(1)} + A^{(2)}) = P_\gamma^*(A^{(1)}) + P_\gamma^*(A^{(2)}) = 1$$

ソテ

$P_\gamma(A^{(2)}) = 1 - \gamma$, $P_\gamma^*(A^{(2)}) = 1 - \gamma^*$ ガ成立スル

亦 [illegible] 等

$$R_n = E_{(Z_1, \cdots Z_n)} \quad (\omega \in A_n)$$ トオク

亦 $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ 等モ同様ニ定義スル

―――― o ――――

(註4) 前記伊藤氏著書9頁以下参照

―――― o ――――

Z ノ distribution ガ continuous ナル場合ニツキ証明スル(註5)

$$E_1(e^{Z_n h_0} \mid \mathfrak{X}) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_\gamma(A_n^{(1)}) E_{A_n^{(1)}}(e^{Z_n h_0})}{P_\gamma(A^{(1)})}$$

$$= \frac{1}{P_\gamma(A^{(1)})} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^{(1)}} e^{(x_1 + \cdots x_n) h_0} f_{Z_1}(x_1) \cdots f_{Z_n}(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{P_\gamma(A^{(1)})} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n^{(1)}} e^{x_1 h_0} f_{Z_1}(x) \cdots e^{x_n h_0} f_{Z_n}(x) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{P_r(A^{(1)})}\sum_{n=1}^{\infty} P_r^*(A_n^{(1)}) = \frac{P_r^*(A^{(1)})}{P_r(A^{(1)})} = \frac{\gamma^*}{\gamma}$$

コノデ（7）ノ最初ノ式ハ証明サレタ。

（7）ノ第二ノ式ハ $P_r(A^{(2)})=1-\gamma$，$P_r^*(A^{(2)})=1-\gamma^*$ ヲ用ヰテ全様ニ証明出来ル。同様ニ（8）モ証明出来ル。$\mathfrak{Z}$ ノ distribution ガ discrete ナ場合ニハ証明ハ更ニ容易デアル。依ツテ定理Ⅰハ証明サレタ。

——o——

（註5）$E_1(e^{Z_n h_0}|\mathfrak{Z}) = E_1\left(\dfrac{f^*(z_1)\cdots f^*(z_n)}{f(z_1)\cdots f^*(z_n)}\,\Big|\,\mathfrak{Z}\right)$ トモオケルコトニ注意サレタシ

但シ $f_{Z_K}(x) = f(x)$ $(K=1,2\cdots)$，$f_{Z_K}(x)=f(x)$ $(K=1,2\cdots)$ トオイタ。

——o——

定理2.

若シ $E(Z)\neq 0$ ナラバ

(10) $$E(n|\mathfrak{Z}) = \frac{E(Z_n|\mathfrak{Z})}{E(Z)}$$

ガ次ノ條件ノ中ノ一ツガ満足サレル時凡テノ函数列 $\mathfrak{Z}=\{K_i(Z_1,\cdots Z_i)\}$ ニ対シテ成立スル

(a) $P_r\{n\leq N\}=P_r\{\sum_{n=1}^{N} A_n\}=1$ ナル如キ N ガ存在スル場合

(b) $E(n|\mathfrak{Z})=\sum_{n=1}^{\infty} n P_r(A_n)<\infty$ 及ビ Z ノ最初ノ四ツノ moments ガ finite デアル

［證明］最初ニ(a)ノ場合ニツイテ証明スル

$$P_r\{n\leq N\}=P_r\{\sum_{i=1}^{N} A_n\}=1$$ ダカラ

(11) $$N E(Z) = E(Z_N) = E(Z_n|\mathfrak{Z}) + E(Z_{n+1}+\cdots+Z_N|\mathfrak{Z})$$

3P E *expectation* ~~[illegible]~~

$$= E(Z_n|\text{区}) + \sum_{n=1}^{N} \underline{P_Y(A_n)\, E_{A_n}}(Z_{n+1} + \cdots + Z_N)$$

$$= E(Z_n|\text{区}) + \sum_{n=1}^{N} P_Y(A_n) E(Z_{n+1} + \cdots + Z_N)$$

$$= E(Z_n|\text{区}) + \left\{\sum_{n=1}^{N} (N-n) P_Y(A_n)\right\} E(Z)$$

$$\doteq E(Z_n|\text{区}) + NE(Z)\sum_{n=1}^{N} P_Y(A_n) - \left\{\sum_{n=1}^{N} n P_Y(A_n)\right\} E(Z)$$

$$= E(Z_n|\text{区}) + NE(Z) - E(n|\text{区})E(Z)$$

故ニ $\cancel{E(n|\text{区})E(Z) =}\ E(Z_n|\text{区})$ デアル

依テ(a)ノ場合ニ対シテハ証明出来タ。

次ニ(b)ノ場合ニツイテ証明スル

今 $P_N = P_Y(n \leq N) = P_Y\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right)$

E_N = Conditional expected value under estriction that $n \leq N$

E'_N = Conditional expected value under restriction that $n > N$

トオク 然ル時

$$(12)\quad NE(Z) = \underline{\underline{E(Z_N)}} = P_N E_N(Z_N) + (1-P_N) E'_N(Z_N)$$

デアル。ココデ

$$E_N(Z_N) = E_N(Z_n|\text{区}) + E_N(Z_{n+1} + \cdots + Z_N|\text{区})$$

$$= E_N(Z_n|\text{区}) + E_N(N-n|\text{区})E(Z)$$

$$= E_N(Z_n|\text{区}) + NE(Z) - E_N(n|\text{区})E(Z)$$ デアル

カラコレヲ前式ニ入レテ

$$(13)\quad NE(Z) = P_N\{E_N(Z_n|\text{区}) + NE(Z) - E_N(n|\text{区})E(Z)\} + (1-P_N)E'_N(Z_N)$$

依テ $E(n|\text{区}) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_Y(A_n) < \infty$ カラ

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n P_r(A_n) \geq \sum_{n=N+1}^{\infty} N P_r(A_n) = N \sum_{n=N+1}^{\infty} P_r(A_n) = (1-P_N)N$$

故＝ $\lim_{N\to\infty}(1-P_N)N=0$ ナルコトガ云ヘル

コレヲ用ヒテ先ヅ

$\lim_{N=\infty}(1-P_N)E'_N(Z_N)=0$ ヲ示ス

今 $T_N=Z_N-NE(Z)$ トオク

コノ時 $\lim_{N=\infty}(1-P_N)E'_N(T_N)=0$ ヲ云ヘバヨイ

ソレニハ $D_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}A_n$ トスレバ

$P_r(D_N)=P_r(\sum_{n=N+1}^{\infty}A_n)=1-P_N$ デアリ

(14) $(1-P_N)E'_N(T_N)=\int_{C_N} t_N f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_n}(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

デアル　但シコヽニ $t_N=(x_1+\cdots+x_N-NE(Z))$,

$C_N=\underset{(Z_1\cdots Z_N)}{E}\ (\omega\in D_N)$ ナルモノトスル

コヽデ C'_N ヲ C_N ノ中ノ $t_N<-N$ ナル部分，C^2_N ヲ C_N ノ中ノ $t_N>N$ ナル部分，C^3_N ヲ C_N ノ中ノ $-N\leq t_N\leq N$ ナル部分ヲ示スモノトスル。

然ル時

(15) $\lim_{N=\infty}\left|\int_{C^3_N} t_N f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N\right| \leq$

$\lim_{N=\infty} N\int_{C_N} f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_N}(x_n)\,dx_1\cdots dx_N$

$=\lim_{N=\infty} NP(D_N)=\lim_{N=\infty}(1-P_N)N=0$

亦 T_N ノ分布函数ヲ $F_{T_N}(T_N)$ トスルト

(16) $\int_{C^2_N} t_N f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N \leq \int_N^{\infty} t_N\, dF_{T_N}(T_N)$

$= \frac{1}{N^2}\int_N^{\infty} t_N^4 \, dF_{T_N}(t_N)$

仮テZノ最初ノ四ツノ moments ガ有限デアルカラ $\frac{T_N}{\sqrt{N}}$ ノ四次ノ moment ハ $3\sigma^4$ ニ converge スル

但シコヽニ σ ハZノ標準偏差トスル

從ツテ

(17) $\lim_{N=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{N^2}t_N^4 \, dF_{T_N}(t_N) = 3\sigma^4$

(16)ト(17)カラ

(18) $\lim_{N=\infty}\int_{C_N^2} t_N f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = 0$

同様ニ

(19) $\lim_{N=\infty}\int_{C_N^1} t_N f_{Z_1}(x_1)\cdots f_{Z_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N = 0$

ナルコトモ証明シ得ル

依テ(14)ヨリ

$\lim_{N=\infty}(1-P_N)E_N'(T_N)=0$ ガ証明サレタ

故ニ $\lim_{N=\infty}(1-P_N)E_N'(Z_N)=0$ ガ云ヘタ

從ツテ(13)ハ書キカヘテ

$$(1-P_N)NE(Z)=P_N\{E_N(Z_N|\Xi)-E_N(n|\Xi)E(Z)\}$$
$$+(1-P_N)E_N'(Z_N)$$

デアルカラ $\lim_{N=\infty}(1-P_N)NE(Z)=0$

$\lim_{n=\infty}(1-P_N)E_N'(Z_N)=0$ ヲ用ヰテ

$$\lim_{n=\infty}P_N\{E_N(Z_N|\Xi)-E_N(n|\Xi)E(Z)\}=0$$

ガ出ル，$E(Z)\neq 0$ デ且 $\lim_{N=\infty}P_N=1$，

$$\lim_{N=\infty}E_N(n|\Xi)=E(n|\Xi),\ \lim_{N=\infty}E_N(Z_n|\Xi)=E(Z_n|\Xi)$$

デアルカラ(e)ノ場合ノ証明が出来タ
依テ定理2ノ証明ヲアヘタ

4. E(n|K)ノ lower limit ニ関スル定理

本節デハ E(n|K)ノ lower limit ニ関スル定理ニツイテ述ベヤウ。先ヅ次ノ補助定理ヲ証明セウ

補助定理1

加何ナル実確率変数 u ニ対シテモ

$$e^{E(u)} \leqq E(e^{u})$$

が成立スル

[証明]
コレハ書キ変ヘテ

(20) $\quad 1 \leq E(e^{u'})$ トシ得ル

但シ $u' = u - E(u)$ デアル
依テ(20)ヲ証明スレバヨイコトニナル
故ニコノ補助定理ハ平均値0ナル実確率変数 u' ニツイテ成立スルコトヲ云ヘバヨイ

$$e^{u'} = 1 + u' + \frac{u'^2}{2} e^{\xi(u')} \qquad 0 < \xi(u') \leq u'$$

従ッテ $\quad E(e^{u'}) = 1 + \frac{1}{2} E\{u'^2 e^{\xi(u')}\} \geq 1$
依テ証明サレタ
コレヲ使ッテ次ノ定理ヲ証明スル

定理3 $\quad K = \{K_i(Z_1, \cdots, Z_i)\}$ ヲ $P_\gamma(n < \infty) = P_\gamma(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$, $P_\gamma^*(n < \infty) = P_\gamma^*(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$

ナル如キ函数列トスル 亦 $\gamma = P_\gamma(A^{(1)})$,
$\gamma^* = P_\gamma^*(A^{(1)})$ トスル

然ル時　$E(Z) \neq 0$, $E^*(Z) \neq 0$　トスレバ

$$\underline{E(n|K)} \geq \frac{1}{h_0 E(Z)} \left[\gamma \log \frac{\gamma^*}{\gamma} + (1-\gamma) \log \frac{1-\gamma^*}{1-\gamma} \right]$$

$$\underline{E^*(n|K)} \geq \frac{1}{h_0 E^*(Z)} \left[\gamma^* \log \frac{\gamma^*}{\gamma} + (1-\gamma^*) \log \frac{1-\gamma^*}{1-\gamma} \right]$$

ガ成立ツ。

[証明]　初メ　$P_\gamma(n \leq N) = 1$, $[P^*_\gamma(n \leq N) = 1]$　ナル如キ N ガ存在スル場合ニツイテ証明スル

定理2ニヨリ

$$E(n|K) = \frac{E(Z_n|K)}{E(Z)} = \frac{1}{E(Z)} \left[\gamma E_1(Z_n|K) + (1-\gamma) E_2(Z_n|K) \right]$$

仍テ補助定理1ト定理1トニヨリ

$$h_0 E_1(Z_n|K) = E_1(Z_n h_0|K) \leq \log E_1(e^{Z_n h_0}|K) = \log \frac{\gamma^*}{\gamma}$$

$$h_0 E_2(Z_n|K) \leq \log \frac{1-\gamma^*}{1-\gamma}$$　デアル

依テ　$$h_0 E(Z) E(n, K) = h_0 \left[\gamma E_1(Z_n|K) + (1-\gamma) E_2(Z_n|K) \right]$$
$$\leqq \gamma \log \frac{\gamma^*}{\gamma} + (1-\gamma) \log \frac{1-\gamma^*}{1-\gamma}$$

ガ云ヘル

依テ　$h_0 E(Z) < 0$　ナルコトガ云ヘレバ定理ノ初ノ方ハ証明出来ル

$$E(e^{h_0 Z}) = 1$$　ダカラ補助定理ニヨリ

$$1 = E(e^{h_0 Z}) \geq e^{E(h_0 Z)}$$

故ニ　$0 \geq E(h_0 Z) = h_0 E(Z)$

亦　$h_0 \neq 0$, $E(Z) \neq 0$　ダカラ　$h_0 E(Z) < 0$　デナケレバナラヌ　依テ定理ノ初ノ方ガ成立スル

次ニ定理ノ後ノオモ同様ニ証明出来ル

$$-h_0E^*(Z)E^*(n|\mathfrak{X}) = -h_0E^*(Zn|\mathfrak{X})$$
$$= -h_0[\gamma^*E_2(Z_n|\mathfrak{X}) + (1-\gamma^*)E_2^*(Z_n|\mathfrak{X})$$

仮テ $E(-u) \leq \log E(e^{-u})$ for all u ダカラ

$$-h_0E^*(Z)E^*(n|\mathfrak{X}) \leq \gamma^*\log E_1^*(e^{-Z_nh_0}|\mathfrak{X})$$
$$+(1-\gamma^*)\log E_2^*(e^{-Z_nh_0}|\mathfrak{X})$$

依テ定理1ニヨリ

$$= \gamma^*\log\frac{\gamma}{\gamma^*} + (1-\gamma^*)\log\frac{1-\gamma}{1-\gamma^*}$$

ヲ得ル　従ツテ

$$h_0E^*(Z)E^*(n|\mathfrak{X}) \geq \gamma^*\log\frac{\gamma^*}{\gamma} + (1-\gamma^*)\log\frac{1-\gamma^*}{1-\gamma}$$

ヲ得ル

仮テ　$E^*(e^{-h_0Z}) = 1$　ダカラ

$$E^*(-h_0Z) \leq \log E^*(e^{-h_0Z}) = 0$$

故ニ　$-h_0E^*(Z) \leq 0$

$h_0 \neq 0$, $E^*(Z) \neq 0$　ダカラ　$-h_0E^*(Z) < 0$

従ツテ　$h_0E^*(Z) > 0$

故ニ　$$E^*(n|\mathfrak{X}) \geq \frac{1}{h_0E^*(Z)}[\gamma^*\log\frac{\gamma}{\gamma^*} + (1-\gamma^*)\log\frac{1-\gamma^*}{1-\gamma}]$$

ガ云ヘタ

次ニ一般ノ場合ヲ証明スル

凡テノ N ニ対シテ $\mathfrak{X}_N = \{K_{iN}(Z_1, --- Z_i)\}$ ナル函数列ヲ考ヘル

ココニ　$K_{iN}(Z_1, ---, Z_i) = K_i(Z_1, --- Z_i)$ for $i < N$

デアリ　$K_{iN}(Z_1, ---, Z_i) = 1$　for $i \geq N$ トスル

今 $\mathfrak{X}$ ノ代リニ $\mathfrak{X}_N$ ヲトツタトスルト

γ, γ^* ニ相当スルモノヲ夫々

γ_N, γ_N^* デ表ハス　然ル時

$$E(n|\mathrm{区}) \geq E(n|\mathrm{区}_n) \geq \frac{1}{h_0 E(z)}\left[\gamma_N \log\frac{\gamma_N^*}{\gamma_N} + (1-\gamma_N)\log\frac{1-\gamma_N^*}{1-\gamma_N}\right]$$

及ビ　$E^*(n|\mathrm{区}) \geq E^*(n|\mathrm{区}_N) \geq$

$$\frac{1}{h_0 E^*(z)}\left[\gamma_N^* \log\frac{\gamma_N^*}{\gamma_N} + (1-\gamma_N^*)\log\frac{1-\gamma_N^*}{1-\gamma_N}\right]$$

ガ成立スル

而シテ　$\lim_{N=\infty} \gamma_N = \gamma$　及ビ　$\lim_{N=\infty} \gamma_N^* = \gamma^*$　デアルカラ定理ガ証明デキル。

[$\because$　$\gamma = P_\gamma(A^{(1)})$, $\gamma^* = P_\gamma^*(A^{(1)})$ デ

$$\gamma_N = P_\gamma\left(\sum_{n=1}^{N-1} A_n^{(1)} + \sum_{n=N}^{\infty} A_n\right),\ \gamma_N^* = P_\gamma^*\left(\sum_{n=1}^{N-1} A_n^{(1)} + \sum_{n=N}^{\infty} A_n\right)]$$

5. 補足的説明

本論文デ得ラレタ結果ハ著者 Wald 等ニヨリ発展セシメラレテキル sequential analysis ニ関スル諸理論ヘ応用サレル際ニ非常ニ有効デアル。然シ本論文デハコノ応用ニツイテハ言及サレテヰナイ。本論文ノ応用例ハソノ後ニWaldニヨッテ発表サレタ論文

Wald: Sequential Tests of Statistical Hypothesis, Annals of Math Stat. vol, 16.

ニ於テ見ラレルデアラウ。コノ論文ノ紹介モ近イ中ニ筆者ニヨリ発表サレル予定デアル。

本論文ノ結果ハ sequential analysis ニ関シ

(291)

ニテ得ラレタ結果ヨリモモット一般的デアル

亦定理3ハ

, Wald, sequential tests, 論文, section 4. 7 デ論ジラレテヰル the efficiency of the sequential probability ratio test ニオケル理論ノ拡張ニナツテヰル