正規確率過程について

河田敬義(東京文理大)

前について(本誌第一巻第六号), 今度は二次元の正規過程でMarkoff過程となるものについて若干簡単なる考察をした。§1, §2では整数をパラメーターとする場合, §3では実数をパラメーターとする場合主題の, 標準形を求めることを目標とした。

§1

定常二次元正規Markoff過程(正常な場合)

今整数をパラメーターとする二次元確率変数の列(即確率過程):

$$\left\{\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}\right\}, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

に於て。

(1) $(X_k, Y_k, X_{k+1}, Y_{k+1}, \cdots, X_{k+n}, Y_{k+n})$,

$$n=0,1,2,\cdots,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

がGauss分布なるとき 二次元正規確率過程といふ

特に(1)が$2n$次元の(非縮退)Gauss分布なるとき正常といひ, 又(1)の分布がkに無関係のときに定常といふ。

§1では, 定常にして正常な場合のみを考へる。

又予め

(2) $E(X_n)=E(Y_n)=0, \qquad n=0,\pm1,\pm2,$

(Eは確率変数の数学的期望値を表はす。)

の場合のみを考へるが，これは一般性を失ふものではない。

今後 $X, Y, U, V, \cdots$ 等大文字は確率変数，$a, b, c, d, \cdots$
$\cdots, \alpha, \beta, \cdots$ 等は数を表はす。

先づ与へられた確率過程が単一Markoff過程となる條件を考へる。方針は

伊藤清氏：On the normal statisnary process with no hysteresis, Proc. Imp. Acad. 20 (1944)

を真似る。今

$$(X, Y) = E(X, Y)$$

なる記号を用ゐることとする。先づ $k>0$ を定めて

$$(3)\quad \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

$$(4)\quad (U, X_i) = (U, Y_i) = (V, X_i) = (V, Y_i) = 0$$
$$i = 0, 1, \cdots, k-1$$

なるごとく数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ を決定しやう。(3)は書き直せば

$$(3')\quad \begin{cases} X_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_i X_i + \beta_i Y_i) + U \\ Y_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\gamma_i X_i + \delta_i Y_i) + V \end{cases}$$

であるから(4)なるための條件は

$$(5')\quad \begin{cases} (X_k X_l) = \sum_{i=0}^{k-1} \{\alpha_i (X_i, X_l) + \beta_i (Y_i, X_l) \\ (X_k, Y_l) = \sum_{i=0}^{k-1} \{\alpha_i (X_i, Y_l) + \beta_i (Y_i, Y_l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Y_k, X_l) = \sum_{i=0}^{k-1} \{\gamma_i (X_i, X_l) + \delta_i (Y_i, X_l) \\ (Y_k, Y_l) = \sum_{i=0}^{k-1} \{\gamma_i (X_i, Y_l) + \delta_i (Y_i, Y_l) \end{cases}$$

なることである。ところが正常といふ假定から2k次の行列式

$$\det\begin{vmatrix}(X_i\,X_l) & (Y_j\,X_l)\\ (X_i\,Y_m) & (Y_j\,Y_m)\end{vmatrix}\neq 0$$

$$(i,j,l,m=0,1,\cdots,k-1)$$

である。よつて (5_1), (5_2) を解いて α_i, β_i, γ_i, δ_i が夫々一義に決定される。今

(6) $\quad X_i=\lambda_i,\quad Y_i=\mu_i\quad (i=0,1,2,\cdots,k-1)$ と

なる條件の下に $(X_k,\,Y_k)$ の分布を求めると

(7) $\quad\left(\sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_i\lambda_i+\beta_i\mu_i)+U,\ \sum_{i=0}^{k-1}(\gamma_i\lambda_i+\delta_i\mu_i)+V\right)$

の分布と一致する。單一Markoff過程であるといふ假定から(7)の分布は

$$\lambda_i,\mu_i\ (i=0,1,\cdots,k-2)$$

に無関係でなければならない。即ち

(8) $\quad\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=\delta_i=0\qquad i=0,1,\cdots,k-2$

がそのために必要十分である。

今定常といふ假設からパラメーターの位置をづらして考へれば

(9) $\quad\begin{pmatrix}X_1\\ Y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\ Y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix}$

(10) $\quad(U,X_i)=(U,Y_i)=(V,X_i)=(V,Y_i)=0\quad(i=0,-1,-2,\cdots)$

と表はされることが單一Markoff過程となるために必要十分條件である。

これを自己相関係数を用いて言ひ表せば，先づ(9)，(10)から

$$(11)\quad \begin{pmatrix} (X_1, X_0) & (X_1, Y_0) \\ (Y_1, X_0) & (Y_1, Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (X_0, X_0) & (X_0\ Y_0) \\ (X_0, Y_0) & (Y_0, Y_0) \end{pmatrix}$$

により，今

$$(12)\quad \boxed{a_n = (X_n, X_0), \quad b_n = (Y_n, Y_0), \quad c_n = (X_n, Y_0)}$$

とおけば

$$(13)\quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_{-1} & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}^{-1}$$

によつて$\alpha, \beta, \gamma, \delta$が定まり，(10)の條件を$-i<0$の場合に書けば

$$(14)\quad \begin{pmatrix} a_{i+1}, & c_{i+1} \\ c_{-(i+1)}, & b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ c_{-i}, & b_i \end{pmatrix},$$

これに(13)を代入して，結局

$$(15)\quad \begin{pmatrix} a_{i+1}, & c_{i+1} \\ c_{-(i+1)} & b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_{-1} & b_1 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}$$

となる。以上より

定理 1 『正常なる定常二次元正規過程が単一過程となるための必要十分條件は，自己相関係数(12)の間に

$$(16)\quad \boxed{\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ c_{-n} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}} \qquad (n \geq 1)$$

但し $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & c_1 \\ c_{-1} & b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0 & c_0 \\ c_0 & b_0\end{pmatrix}^{-1}$

なる関係が成立つことである。

又は一定の $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対して(16)が $n \geqq 1$ に対して成立つことであるといつてもよい。

$a_n\ b_n\ c_n\ c_{-n}\ (n=0,1,2,\cdots)$ を与へれば正規過程は決定されるのであるから、今度は逆に如何なる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ により(16)式によつて $a_n, b_n, c_n, c_{-n}\ (n=1,2,\cdots)$ を定めれば求める単一Markoff過程をなす正常正規過程が得られるといふ問題を解決しなくてはならない。

a_n, b_n, c_n, c_{-n} の満足すべき必要十分条件はH. Cramer (Annals of Math) によつて与へてあるからそれをためす方法もあるかも知れないが、此処では既知の場合に引直すことによつて考へて見ることにする。

今(16)を満足する単一Markoff過程があつたとする。Schwarzの不等式より

$$|a_n| \leqq a_0,\ |b_n| \leqq b_0,\ |c_n||c_{-n}| \leqq \sqrt{a_0 b_0}$$

であるから(16)より

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

は平等に有界でなければならない。従つて行列 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ の固有値の絶対値は1を超えることはない。

次に又正常正規過程であるといふ仮定から絶対値が1に等しい固有値も存在しないことが分る。それは(複素数をも許して)適当に

$n=1,2,\cdots$

$$\begin{pmatrix}X'_n \\ Y'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_n \\ Y_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}U'_n \\ V'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_n \\ V_n\end{pmatrix}$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ Y'_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \qquad |\delta'| = 1$$

に直せる。故に

$$Y'_n = \delta' Y'_{n-1} + V_n$$

$$\therefore (Y'_n, Y'_n) = (Y'_{n-1}, Y'_{n-1}) + (V'_n, V'_n)$$

から(定常性により) $V_n = 0$, 即ち

$$Y'_n = \delta' Y'_{n-1}$$

が結論される。これは正常性と矛盾する。

よって$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$の固有値の絶対値はすべて1より小でなければならぬことが分った。これから(9)のパラメーターをつらして

$$(9) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ (U_n, X_i) = (U_n, Y_i) = (V_n, X_i) = (V_n, Y_i) = 0 & \\ & (i = n-1, n-2, \cdots) \end{cases}$$

であるから反覆あてはめれば

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} U_{n-i} \\ V_{n-i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^\nu \begin{pmatrix} X_{n-\nu} \\ Y_{n-\nu} \end{pmatrix}$$

となる。此処で

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$|\alpha_n|, |\beta_n|, |\gamma_n|, |\delta_n| \leqq \rho^n C \qquad |\rho| < 1$$

とおさへられる。

故に

(18)
$$\boxed{\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} U_{n-i} \\ V_{n-i} \end{pmatrix} \quad (\text{平均收斂})}$$

とあらはされる。但し

(19)
$$\boxed{\begin{array}{l} (U_i, U_j) = (V_i, V_j) = (U_i, V_j) = 0 \quad (i \neq j) \\ (U_n, U_n) = \lambda > 0,\ (V_n, V_n) = \mu > 0,\ (U_n, V_n) = \nu; \\ \qquad |\nu| \leqq \sqrt{\lambda \mu} \end{array}}$$

である。逆にこの場合には求める性質を持ってゐることは明かであるから

$\boxed{\text{定理2}}$「単一Markoff過程をなす正常な定常正規過程を得るためには定理1に於ける行列$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$の固有値の絶対値が1より小なることが必要十分である。其の場合(19)なるGauss分布に従ふ確率変数列$\{U_n\}\{V_n\}$より、(18)により$\{(X_n, Y_n)\}$を作れば、求めるものであり且之以外にない。」

(18)(19)は二次元正規分布をなす二次元確率変数の独立列から構成されることを示してゐる。独立な列の場合には種々の詳い性質が知られてゐるから、それを(18)により適用することも出来るが此処ではそのことに立入らない。

§1の最後に標準形について考へよう。

(I) $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \neq 0$ の場合

定常な系列でなくて

$$\begin{pmatrix} X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2,$$

なる系列を考へるならば

$$\begin{cases} X'_n = X'_{n-1} + U'_n, \quad Y'_n = Y'_{n-1} + V'_n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \\ (U'_n, X'_i) = (U'_n, Y'_i) = (V'_n, X'_i) = (V'_n, Y'_i) = 0, \ (i < n) \end{cases}$$

を満足する。即ち $\{X'_n\}$ $\{Y'_n\}$ は次才に独立な項を重ね合せて行くものと考へられる。

(II) $\det\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 0$ の場合

(イ) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

$$(X_i, X_j) = (Y_i, Y_j) = (X_i, Y_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

即ちすべて相異なるものは互に独立なる場合

(ロ) 適当なる行列 T により $T^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ と直せる場合

$$\begin{pmatrix}X'_n \\ Y'_n\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}X_n \\ Y_n\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}U'_n \\ V'_n\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}U_n \\ V_n\end{pmatrix}$$ とすれば

$$\begin{cases} X'_n = Y'_{n-1} + U'_n \\ Y_n = \quad V'_n \end{cases}$$

即 $X'_n = Y'_{n-1} + U'_n$,

$$(U'_i, X'_j) = (U'_i, Y'_j) = 0 \quad (i > j)$$

$$(Y'_i, Y'_j) = (Y'_i, X'_j) = 0 \quad (i > j)$$

となる。

(ハ) $T^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ となる場合

(ロ) と同様な交換により

$$\begin{cases} X'_n = \lambda X'_{n-1} + U'_n \\ (U'_n, X'_i) = (U'_n, Y'_i) = 0 & (i < n) \\ (Y'_i, Y'_j) = (Y'_i, X'_j) = 0 & (i > j) \end{cases}$$

となる。

§2.

正常でない場合

定常過程であるから、次の場合が可能になる。但し (X_n, Y_n) は二次元分布になることは仮定する。

(I) (X_0, Y_0, X_1, Y_1) が二次元の場合

$$(20) \qquad \begin{cases} X_1 = \alpha X_0 + \beta Y_0 \\ Y_1 = \gamma X_0 + \delta Y_0 \end{cases}$$

とあらはされる。このとき $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ の固有値の絶対値は1である。何となれば、そうでなければ A^n; $n \to \infty$ を考へると

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

にて適当なる $\lambda X_n + \mu Y_n$ を作れば $n \to \infty$ のときに0に平均収斂して定常性に反する。(正常ならば固有値は絶対値<1と同一議論) これは§1, U_n, V_n がとくに0の場合に相当する。結局

$$(X_k, Y_k, X_{k+1}, Y_{k+1}, \cdots, X_{k+m}, Y_{k+m})$$

も亦二次元の分布となってしまひ、trivial な場合である。

(II) (X_0, Y_0, X_1, Y_1) が三次元の場合

一般性を失ふことなく (X_0, Y_0, X_1) が三次元分布をなし

$$Y_1 = \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma X_1$$

とあらはされるものとしてよい。　$\alpha=\beta=0$ となることはない。

(イ) $\alpha \neq 0$

$Z_0=\alpha X_0+\beta Y_0,\ Z_1=\alpha X_1+\beta Y_1$ とおきかへれば

(21) $$Y_1\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)=Z_0+\frac{\gamma}{\alpha}Z_1$$

故に $\begin{pmatrix} Z_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ なる列を考へれば

(i) $1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}=0$ なるときは $\gamma \neq 0$,　$Z_1=-\frac{\gamma}{\alpha}Z_0$

即ち $$Z_n=\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n Z_1 \qquad (n=0,\pm 1,\cdots)$$

なる列と，別に（適当な Y_n を X_n と Y_n との一次結合をとつて

$$(Y_n, Z_n)=0$$

にとられた一次元 Markoff 過程 $\{Y_n\}$ なる列とに帰着さ。

(ii) $1+\frac{\beta\gamma}{\alpha} \neq 0$ なるときは

$\{Z_n\}$ なる一次元確率変数列は過去二つのパラメーターの値に対する Z の値にのみ影響される二重 Markoff 過程となる。何となれば Z_n の分布は過去の分布中 (Y_{n-1}, Z_{n-1}) の値さへ知れば，他の Y_{n-i}, Z_{n-i} $(i>1)$ の値によつては影響されない。しかるに (21) により Y_{n-1} の値は Z_{n-2} の値できまる。即 Z_n の分布は Z_{n-1}, Z_{n-2} の値さへ知れば Z_{n-i} $(i>2)$ の値によつて影響されない。これは二重 Markoff 過程なることを示す。そして Y_n は

$$Y_n=\lambda Z_{n-1}+\mu Z_n \qquad (\lambda \neq 0)$$

なる関係で $\{Z_n\}$ から表される。即ちこの場合は一次元の二重 Markoff 過程が問題となる。

以上の場合では

$$(X_0 . Y_0\ X_1\ Y_1 \cdots X_{n-1}\ Y_{n-1})$$

は$(n+1)$次元分布をなす。

(ロ) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ の場合

$$Y_1 = \beta Y_0 + \gamma X_1$$

(i) $\gamma = 0$ の場合 (イ)(i)と同様

(ii) $\gamma \neq 0$ のときは

$$X_1 = -\frac{\beta}{\gamma} Y_0 + \frac{1}{\gamma} Y_1$$

となり (イ)(ii)と同様

(III) $(X_0\ Y_0\ X_1\ Y_1)$ は四次元であるが、一般に

$(X_0, Y_0 . X_1\ Y_1 \cdots X_{r-1}\ Y_{r-1})$ は$2r$次元であるが

$(X_0\ Y_0\ X_1\ Y_1 \cdots X_r\ Y_r)$ は$2r$又は$(2r+1)$次元となる場合記号の簡単のため

$(X_0\ Y_0\ X_1\ Y_1\ X_2\ Y_2)$が四次元のときは

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

とあらはされる。これが単一Markoff過程となるためには

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

でなければならぬ。これでは$(X_1\ Y_1\ X_2\ Y_2)$が二次元となってしまふ。これは矛盾。同様な理由から(III)の場合は起り得ない。

以上をまとめて

$\boxed{\text{定理 3}}$ 『正常でない場合は適当に

$$\begin{pmatrix} X_n' \\ Y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

を取ることにより、次の三つの場合のいづれかになる。

(I) $\begin{pmatrix} X_n' \\ Y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \end{pmatrix} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2,$

(II) $X_n' = \lambda^n X_0'$, $\lambda = \pm 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$\{Y_n'\}$ は単一 Markoff 過程

$(X_0', Y_0') = 0$

(III) $\{X_n'\}$ は一次元二重 Markoff 過程

$Y_n' = \alpha X_n' + \beta X_{n-1}'$, $\beta \neq 0$

(I) のときは $(X_0 Y_0 \cdots X_{n-1} Y_{n-1})$ は二次元

(II)(III) のときは $(X_0 Y_0 \cdots X_{n-1} Y_{n-1})$ は $(n+1)$ 次元

である。

§3.

連続過程の場合

今度は $\begin{Bmatrix} X_t \\ Y_t \end{Bmatrix}$ $(-\infty < t < \infty)$ なる t をパラメーターとする二次元定常正規確率過程を考へる。條件として

$t \to 0$ のとき $\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$ に確率收斂するものとする。今

$$\begin{Bmatrix} X_{t_n} \\ Y_{t_n} \end{Bmatrix} \quad t_n = \frac{n}{N}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

なる列を考へれば、（N を一定として）これは §1, 2, に於て

考察した場合である。

今すべてのNに対して正常となる場合を考へると $N=2^m$ とすれば

$$\begin{pmatrix} X_{\frac{1}{2^m}} \\ Y_{\frac{1}{2^m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$$

に於て

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ U_m,\ V_m \longrightarrow 0 \qquad m \to \infty \end{cases}$$

でなければならぬ。故に§1の $\det\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ の場合のみしか起らない。即ち $m \to \infty$ なる極限を考へれば

$$(2.2)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ \gamma_t & \delta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} \\ (U_t, V_s) = (V_t, X_s) = (U_t, Y_s) = (V_t, Y_s) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad (s \leqq 0) \end{cases}$$

且つ

$$\begin{pmatrix} \alpha_{kt} & \beta_{kt} \\ \gamma_{kt} & \delta_{kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ \gamma_t & \delta_t \end{pmatrix}^k \qquad k = 1, 2,$$

を満足する。これから

$$(2.3)\quad \begin{pmatrix} \alpha_t & \beta_t \\ \gamma_t & \delta_t \end{pmatrix} = e^{tM} \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \quad t \geqq 0$$

の形にあらはされる。以上

定理 4 「正常な場合には(2.2), (2.3)によつて表はされる。」

§2ノ一次元二重 Markoff 過程のこと、連續過程の場

合にいろいろ立入って考へる此等まだまだ問題はあるが之等は次の機會に讓り度いと思ふ。 (をはり)