(271)

論文紹介 .5.

Sampling from changing Population

by Reihold Baer

(Annals of math Stat vol 16 PP. 348→)

§1. 問題

確率変数トシテ図式化サレル事象ヲ考ヘル。ソノ事象（ソノ事象ノ模型タル確率変数）ガ時間ト共ニ変化スルト仮定スル。ソノ様ナ実例ノ適当ナモノヲコヽニ述ベ得ヌガソレハ多ク存在スルデアラウ。ソノ事象ヲ実際ニ観測スルノニ、一時ニハ一ツノ観測シカ行ハレ得ナイトスル。次々ノ時刻 $t_1, t_2, \cdots t_n$ ニ於ケル1回毎合計 n 回ノ観測結果 $x_1, x_2 \cdots x_n$ カラ元ノ事象ニツイテ何カヲ推測シヤウトスル問題ガ考ヘラレル。簡單ノタメ確率変数ヲ一次元ノ確率変数、観測結果 $x_1, x_2, \cdots x_n$ ノ各々ヲ実数ト仮定シ問題ヲ次ノ如ク述ベ変ヘル。

$0 \leqq t \leqq 1$ ナル凡テノ実数 t ニ対シテ確率変数 $X(t)$ ガ與ヘラレテヰル。ソノ分布函数ハ $F(x, t)$ デアルトスル。$0 < i \leqq n$ ナル整数 i ニ対シテ t_i ヲ $\frac{i-1}{n}$ ト i/n トノ間ノ実数トスル。T_n ヲ $\{t_1, t_2, \cdots t_n\}$ ナル集合トスル。x_i デ時刻 t_i デノ観測値ヲ X_i デ x_i ヲソノ実現値トスル確率変数ヲ表ハシ $O(T_n)$ デ $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ ナル任意標本ヲ表ハス。母集団ガ一ツノ確率変数 X（ソノ分布函数ハ $F(x)$）デアル時ハソノ母集団カラノ任意標本ハ同時分布函数ガ $F(x_1), F(x_2), \cdots, F(x_n)$ ナル n 次元確率変数デアッタガ母集団ガ $X(t)$ ナル今ノ場合ニハ任意標本 $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ トハ同時分布函数ガ $F(x_1, t_1), F(x_2, t_2), \cdots, F(x_n, t_n)$ ナル n 次元確率変数ノコトデアル。

母集団ガ X ナル時、実測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ヲ任意標

本 $X_1 \cdots X_n$ ノ実現値ト考ヘタ如ク、母集団ガ $X(t)$ ナル今ノ場合ニモ実測値 $x_1 \cdots x_n$ ヲ上ノ如ク定義サレタ任意ノ実現値ト考ヘルノデアル。ソノコトノ実際的意味ハ吾々ノナス観測ノ組ガ「各々ノ時刻ニ於ケル観測ガソノ各々ノ時刻ニ於ケル母集団ノ偏差ナイ代表デアリ且各々ノ時刻ニ於ケル観測ガ互ニ無影響デアル」如ク行ハレタ観測ノ組デアルト云フコトデアル。サテ問題ハ観測値 $x_1 \cdots x_n$ カラ母集団 $X(t)$ ニツイテ推測スルコト[illegible]ノタメニ母集団 $X(t)$ ト任意標本 $O(T_n)$ トノ間ニ[illegible]集団 X トソノ任意標本トノ間ノ理論ノ如キ理論[illegible]ルコトデアル。

$X(t_i)$ 個々又ハソノ"パラメータ"ニ関スル知識ハ望ミ得ナイデアラウ。（大キサ1ナル標本カラノ推定ニナルカラ）併シ $X(t)$ ガ t ニツイテ或意味デ連続ナル場合ニハ $X(t_i)$ 又ハソノ"パラメータ"ノ時間ニツイテノ平均ニツイテノ知識ヲ期待出来ルダラウ。正確ニ云フナラ $a(t)$ デ $X(t)$ ノ平均ヲ、$M_j(t)$ デ $X(t)$ ノ平均ノ周リノ第 j 次能率ヲ表ハシ

$$a = \int_0^1 a(t)\,dt, \quad M_j = \int_0^1 M_j(t)\,dt$$

トオク。（勿論ソレラ凡テガ存在スルト仮定シテ）スルト $O_n(T_n)$ カラ a, M_j ノ推定ガ可能ニ思ハレル。

§2. 結果

§1ニ述ベタ考ヘノ下ニ著者ハ $O(T_n)$ ノ簡単ナ統計量ノイクツカノ n ヲ無限ニ増シタ時ノ極限ヲ考察シ次ノ結果ヲ得テヰル。

(1) $a(t)$ ガ $0 \le t \le 1$ デ存在シソコデ t ニツイテ連続ナラ $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ハ a ニ確率收斂スル。

(273)

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ デ $M_4(t)$ ガ連続シ有界且 $M_2(t)$ ガ連続トスルト $S^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ハ $M_2 + \int_0^1 (a(t) - a)^2 dt$ ニ確率收斂スル

(3) (2) ト同ジ條件ノ下ニ $d^2 = (2n^{-1})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i+1})^2$ ハ M_2 ニ確率收斂スル

ソレ故 d^2 ハ常ニ M_2 ノ一致 (consistent) 統計量ダガ S^2 ハ $a(t)$ ガ常数ノ時ノミサウデアル。

(4) (2) ト同ジ條件ノ下ニ $n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1}$ ハ $\int_0^1 a(t)^2 dt$ ニ確率收斂スル

(5) $d^3 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n-2}(X_i - X_{i+1})^2(X_{i+1} - X_{i+2})$ トスルト $0 \leqq t \leqq 1$ デ $M_6(t)$ ガ存在シ有界且 $M_3(t)$ ガ連続ナル條件ノ下ニ d^3 ハ M_3 ニ確率收斂スル

(6) (5) ト同ジ條件ノ下ニ $S^3 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3$ ハ $M_3 + F_3$ ニ確率收斂スル。但シ

$$F_3 = 3\left(\int_0^1 a(t)M_2(t)dt - aM_2 - a\int_0^1 a(t)^2 dt\right) + 2a^3 + \int_0^1 (a(t))^3 dt$$

トシテ

(7) $0 \leqq t \leqq 1$ デ $M_8(t)$ ガ存在有界シ $M_4(t)$ ガ連続ナル條件ノ下ニ

i) $(2n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i+1})^4$, $n^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i-1} - X_i)^3(X_{i+1} - X_i)$, $n^{-1}\sum_{i=2}^{i-1}(X_{i-1} - X_i)^2(X_{i+1} - X_i)^2$ ハ何レモ $M_4 + 3\int_0^1 M_2(t)^2 dt$ ニ確率收斂スル

ii) $(4n)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - X_{i+1})^2\right]^2$ ハ $M_4 + M_2^2$ ニ、$(4n)^{-1}\sum_{i=2}^{n-2}(X_{i-1} - X_i)^2(X_{i+1} - X_{i+2})^2$ ハ $\int_0^1 M_2(t)^2 dt$ ニ確率收斂スル

iii) i), ii) カラ $n^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum(X_i - X_{i+1})^4 - \frac{3}{4}\sum_{i=2}^{n-2}(X_{i-1} - X_i)^2(X_{i+1} - X_{i+2})^2\right]$ ガ M_4 ニ確率收斂スル

著者ニヨレバ著者ヲコノ研究ニ促シタノハ(2)及ビ(3)ナル結果即チ d^2 ナル統計量(*successive difference*)ノ S^2 ニ比シテノ優越性デアッタサウデアル。

§3 證明

一般ニ任意標本 $O(T_n)$ ノ統計量 $f(O(T_n))$ ガ常数 γ ニ確率收斂スルコトヲ證明スルタメニハ

(i) $\lim_{n\to\infty} E(f(O(T_n))) = \gamma$

(ii) $\lim_{n\to\infty} E[\{f(O(T_n)) - E(f(O(T_n)))\}^2] = 0$ ヲ證明スレバヨイ。(E(X) ハ確率変数 X ノ平均値ヲ表ハス)

§2ニ述ベラレタ結果(1)—(7)ハ(i),(ii)ノ計算ヲ遂行スルコトニヨリ得ラレル。計算ハ全ク形式的デアリ何レモ同ジデアルカラココニハ(3)ノ證明ノミ述ベヨウ。

(3)ノ證明

(i) $E\{(x_i - x_{i+1})^2\} = E\{[(x_i - a(t_i)) + (a(t_i) - a(t_{i+1})) + (a(t_{i+1}) - x_{i+1})]^2\}$

平均値ノ一次性即チ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 及ビ x_i, x_{i+1} ノ独立性カラ $E((x_i - x_{i+1})^2) = M_2(t_i) + (a(t_i) - a(t_{i+1}))^2 + M_2(t_{i+1})$

ソレ故 $E(d^2) = (2n)^{-1}(A + B - C)$ 但シ $A = 2\sum_{i=1}^{n} M_2(t_i)$, $B = \sum_{i=1}^{n-1}(a(t_i) - a(t_{i+1}))^2$, $C = M_2(t_1) + M_2(t_n)$

t_i ハ区間 $(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ ノ間ノ数, n^{-1} ハソノ区間ノ長サダカラ $M_2(t)$ ノ連続性カラ

$\lim_{n\to\infty} (2n)^{-1} A = \int_0^1 M_2(t)\,dt = M_2$, $M_2(t)$ ハ有界ダカラ

$(2n)^{-1}C \to 0$, 又 $a(t)$ ハ連続ダカラ n ヲ十分大キクトレバ $(a(t_i)-a(t_{i+1}))^2 < \epsilon$.

$2n^{-1}\beta < n \cdot \frac{1}{2n} \cdot \epsilon = \frac{\epsilon}{2}$ ニナル。ソレ故 $n \to \infty$ ノトキ $(2n)^{-1}\beta \longrightarrow 0$ ソレ故 $n \to \infty$ ノ時 $E(d)^2 \longrightarrow M_2$

(ii) 次ニ $E((d^2-E(d^2))^2) = E(d^4) - (E(d^2))^2$

$$= E\left((2n)^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - X_{i+1})^2\right)^2\right) - \left(E\left((2n)^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-X_{i+1})^2\right)\right)^2$$

$$= (2n)^{-2}\sum_{i,j}\left[E((X_i-X_{i+1})^2(X_j-X_{j+1})^2) - E((X_i-X_{i+1})^2)E((X_j-X_{j+1})^2)\right]$$

$i, i+1$ ガ $j, j+1$ ノ何レトモ異ル時ハ独立性カラ

$$E((X_i-X_{i+1})^2(X_j-X_{j+1})^2) = E((X_i-X_{i+1})^2)E((X_j-X_{j+1})^2)$$

ソレ故和ノ中ノ0デナイ項ノ個数ハ $3n$ ヲ超エナイ。併シソノ項ノ各々ハ有界ナル $a(t_K)$, $M_2(t_K)$, $M_3(t_K)$ $M_4(t_K)$ ノ多項式トシテ表ハサレルカラ有界デアル。ソレ故 $E((d^2-E(d^2))^2)$ ハ有界ナル項 3^n 項以下ノ和ニ $(2n)^{-2}$ デ割ッタモノ。ソレ故 $n \longrightarrow \infty$ ノ時 $\to 0$ デアル。

(i)(ii) ニヨリ (3) ハ証明サレタ

簡単複雑ノ別ハアルガ (1)――(7) ハ全ク同様ナル形式的計算ニヨリ証明サレル。但シ(7)ノ証明ハ原論文ニモ省畧サレテヰル。

§4. 結果ノ二

§2 ニ述ベタ結果ハ統計量ノ consistency ニ関スルモノノミデアッタ。著者ハ efficiency ニツイテモ二三ヲ述ベテヰル。コノ場合ノ efficiency ノ定義ハ次ノ如クデアル。「任意標本ノ函数 $f(O(T_n))$ ガ常数 γ ニ確率収斂シ且 $\lim_{n \to \infty} nE((f-\gamma)^2)$ ガ存在スル時

$\lim_{n\to\infty} nE((f-\gamma)^2)$ ヲ f ト γ トノ推定値トシテノ efficiency ト呼ブ

コノ定義ノ下ニ著者ガ述ベテヰル結果ハ次ノ如キモノデアル

(8)　(1) ノ條件ニ加ヘテ $a(t)$ ガ有界変分ナラ

$$\lim_{n\to\infty} nE((\bar{X}-a)^2) = M_2$$ デアル

(9)　(2) ノ條件ニ加ヘテ $a(t)$, $M_2(t)$ ガ有界変分ナラ

$$\lim_{n\to\infty} nE((\alpha^2-M_2)^2) = M_4$$

(10)　(9) ト同條件ノ下ニ $\lim_{n\to\infty} nE\left(\left(\delta^2-M_2-\int_0^1 (a(t)-a)^2 dt\right)^2\right)$

$$= M_4 - \int_0^1 M_2(t)^2 dt + 4\int_0^1 (a(t)M_3(t) - aM_3)\, dt + 4\int_0^1 M_2(t)(a(t)-a)^2 dt$$

證明ハ略スル

(10′) デ $a(t)$ ヲ常数トスレバ

$$\lim_{n\to\infty} nE((\delta^2-M_2)^2) = M_4 - \int_0^1 M_2(t)^2 dt$$

$a(t)$ ガ常数ノ時ハ α^2 モ δ^2 モ共ニ M_2 ノ consistent estimate デアル

(9) ト (10′) トガコノ二ツノ consistent estimate ノ efficiency ノ比較ヲ可能ナラシメル

$0 < M_2^2(t) < M_4(t)$ ダカラ十分大キナ n ニ対シテハ M_2 ノ推定値トシテハ δ^2 ノ方ガ α^2 ヨリ efficient デアルコトガ容易ニ示サレル。

§5.　あとがき

以上ハ標題ノ論文ノ概略デアルガ原論文ノ体裁ヲ全ク変ヘテシマッタノデ原論文ノ組立ヲ次ニ示ス

1. 緒論 {問題ノ概説}
2. 記法ト基礎性質 {確率収斂ノ証明法 注意}
3. 平均値 {(1)証明ト共ニ注意3.1}
4. 分散 {(2)(3)証明ト共ニ(4)証明ナシ}
5. 第三次能率 {(5),(6)相当省略サレタ証明ト共ニ注意5.1注意5.2}
6. 第四次能率 {(7)証明ナシ}
7. Efficiency {(8),(9),(10)トソノ証明及(10')以下}

最後ニ各節ニ散在スル種々ノ注意ノ中カラ比較的重要ナモノヲ拾ッテコノ紹介ヲ終ラウ。

「コノ論文デ得ラレタ結果ハ確率収斂ニ関スルモノノミデアル、ソレ故或母集団常数ノ推定値トシテ或標本函数（統計量）ヲ用フルコトニ各々ノ結果ヲ展開シ得ル）ハ標本ノ大イサnガ十分大キイ時ニ限ルガドノ程度以上ノnヲ充分大キイト云ッテヨイカニ関スル判定条件ガ得ラレテナイ。」又「例ヘバ確率収斂 $\bar{x} \to a$ ノ速サハ(i) $\bar{x}$, $E(x)$ ノ推定値トシテノヨサ (ii) 和 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a(t_i)$ ノ積分 $a=\int_0^1 a(t)dt$ ヘノ収斂ノ速サナルニツノ因子ニ関係スル。ソレ故コノ論文デ論ゼラレタ如キ推定ノ理論ハ普通ノタダ一ツノ母集団分布カラノ標本カラノ推定ノ理論ニ比ベテ効果的デナイ。(less efficience デアル)(i)ノ速サハ容易ニ $(M_2/n)^{\frac{1}{2}}$ デアル」等々。 以上

紹介者 平岡隆