Mean Concentration Function と Typical Function V.

国沢清典

こゝでは基礎になっている概念を復習せう。
$F(x)$を与へられた確率変数Xの分布函数、対応する特性函数を$f(t)$とすれば Mean constraction function ($m.c.f.$) と云ふのわ

$$\psi_F(l) = \int_0^\infty e^{-lt} |f(t)|^2 dt$$

のことであり Typical function ($t.f.$) と云ふのわ

$$\Phi_F(l) = \int_0^\infty e^{-lt} Rf(t)\, dt$$

の事を意味する。こゝに$Rf(t)$わ$f(t)$の実数部分をさす。ψ_F, ϕ_Fは容易に次の様に変形出来る

$$\psi_F(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{l^2+x^2}\, d\hat{F}(x)$$

$$\phi_F(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{l^2+x^2}\, dF(x)$$

こゝに$\hat{F}(x)$わ$F(x)$を対称化した分布函数である。
これらの函数につき、次の基本不等式（いづれ簡単な計算により得られる）が成立する。

1° 凡ての$h > 0$に対し

(F. I. 1) $$2(1-\Phi_F(h)) \geq 1-\psi_F(h)$$

2° $Rf(t/h) > \delta > 0 \quad (0 \leq t \leq T)$

を満す$\delta > 0$, $T > 0$及び$h > 0$が存在するならば

(F I. 2) $$1-\psi_F(h) \geq K_2(1-\Phi_F(h))$$

こゝに$K_2 = K_2(T)$わTのみに関係する常数である

3° 凡ての $h>0$ に対し

(F. I. 3) $1-\psi_{F_1 * \cdots * F_n}(h) \leq \sum_{k=1}^{n} (1-\psi_{F_k}(h))$

4° $\prod_{k=1}^{n} |f_k(t/h)|^2 \geq \delta$, $(0 \leq t \leq T)$

を満す $\delta>0$, $T>0$ 及び $h>0$ が存在するならば

(F. I. 4) $\sum_{k=1}^{n} (1-\psi_{F_k}(h)) \leq K_4 (1-\psi_{F_1 * \cdots * F_n}(h))$

こゝに $K_4 \equiv K_4(T, \delta)$ は T と δ とのみに関係する常数である

5° $0 \leq t \leq T$ に対し

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k(\tfrac{t}{k})|^2 \geq \delta,$$

及び

$$\mathrm{R} f_k(\tfrac{t}{k}) \geq \delta \qquad k=1, 2, \cdots, n$$

なる $\delta>0$, $T>0$ 及び $h>0$ が存在するならば

(F. I. 5) $\sum_{k=1}^{n} (1-\varphi_{F_k}(h)) \leq K_5 (1-\varphi_{F_1 * \cdots * F_n}(h))$

である。こゝに $K_5 \equiv K_5(T, \delta)$ は T と δ とのみに関係する常数である。

6° $0 \leq t \leq T$ に於て

$$\mathrm{R} \prod_{k=1}^{n} f_k(\tfrac{t}{h}) \geq \delta$$

なる様な $\delta>0$, $T>0$ 及び $h>0$ が存在するならば

(F. I. 6) $1-\varphi_{F_1 * \cdots * F_n}(h) \leq K_6 \sum_{k=1}^{n} (1-\varphi_{F_k}(h))$

こゝに $K_6 \equiv K_6(T)$ わ T のみに depend する常数である。

7° 正数 $A_1, A_2, \cdots A_n$ の如何なる集合に対しても

(F. I. 7) $$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(t)\exp\left(-\frac{ia_k t}{A}\right)-1\right| \leq (t^2+2|t|+4)\sum_{k=1}^{n}(1-\phi_{F_k}(A))$$

が凡ての $t(-\infty<t<\infty)$ に対して成立する。こゝに

$$A=\max_{1\leq k\leq n} A_k \qquad a_k=\int_{-A_k}^{A_k} x\,dF_k(x) \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

8° $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を与へられた確率変数の集合とし、この中で X_k の期望値 $E(X_k)$ が存在するならば $E(X_k)=0$ なる様にしてあるものとすると、凡ての $t\ (-\infty<t<\infty)$ に対し

(F. I. 7′) $$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{A}\right)\exp\left(-\frac{ia_k t}{A}\right)-1\right| \leq (t^2+2|t|+4)\sum_{k=1}^{n}(1-\phi_{F_k}(A))$$

が成立する。こゝに $A=\max\limits_{1\leq k\leq n} A_k$ であり

$$a_k\begin{cases} 0 & ,\ E(X_k)\ \text{が存在するならば} \\ \displaystyle\int_{|x|\leq A_k} x\,dF_k(x) & \text{それ以外の場合に対して}\end{cases}$$

独立確率変数の和の殆んど凡ての問題は以上の基本不等式の適当な組合せにより得られる。

第4章　大数の法則

§4.1.　大数の法則

$\|X_{nm}\|$ を $X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nm_n}$ は互に独立であるが、行が異れば必ずしも之を仮定しない様な確率変数の集合とし、この $\|X_{nm}\|$ が<u>大数の法則</u>に従っていると云ふのは $\{A_n>0\,|\,n=1,2,\cdots\}$ と $\{-\infty<B_n<\infty\,|\,n=1,2,\cdots\}$ が存在して

(4.1.1)

$$Pr\left\{\left|\frac{1}{A_n}(X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nm_n})-B_n\right|\geq\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

が凡ての$\varepsilon>0$に対して成立する

<u>定理 4.1.1.</u>

$\|X_{nm}\|$が大数の法則に従っているための必要且十分な條件わ次の関係を満足する$\{A_n>0 \mid n=1,2\cdots\}$の存在することである

(4.1.2.) $$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\psi_{F_{nm}}(A_n)\right\}\longrightarrow 0,\quad (n\to\infty)$$

<u>証明</u> <u>必要な事</u>、(4.1.1)より

$$\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)\right|^2\longrightarrow 1\quad (n\to\infty)$$

がもの任意の有限区間で一様に成立する、従って$N_0>0$が存在して

$$\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)\right|^2>\frac{1}{}$$

が$n>N_0$と$0\leq t\leq 2$に対して成立する。従って(F.I.4)より

$$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\psi_{F_{nm}}(A_n)\right\}\leqq K\left\{1-\psi_{F_{n1}*\cdots*F_{nm_n}}(A_n)\right\}$$

が$n\geq N_0$に対して成立する。こゝにKは常数である。(4.1.3)より(4.1.2)が明かに出てくる

<u>十分な事</u> (4.1.2)より容易に

(4.1.4) $$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\psi_{F_{nm}}(\varepsilon A_n)\right\}\longrightarrow 0\quad (n\to\infty)$$

が任意の$\varepsilon>0$に対して成立する。X_{nm}, $\overline{X}_{nm}$ $(n=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots,m_n)$を互に独立な確率変数とし$X_{nm}$と$\overline{X}_{nm}$とわ同じ分布函数$F_{nm}$ $(n=1,2\cdots;m=1,2,\cdots,m_n)$をもつものと仮定する。更に$\widetilde{X}_{nm}=X_{nm}-\overline{X}_{nm}$とおけば

(F. I. 3) より

$$\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\psi_{F_{nm}}(\eta A_n)\}\geq\{1-\psi_{F_{n1}*\cdots*F_{nm_n}}(\eta A_n)\}$$

(4.1.5)

$$\geq\frac{1}{2}P_r\{|\frac{1}{A_n}\sum_{m=1}^{m_n}\tilde{X}_{nm}|\geq\eta\}$$

故に $F_{n1}*\cdots*F_{nm_n}$ の median を M_n で示すならば

$$\sum_{m=1}^{m_n}\tilde{X}_{nm}=\sum_{m=1}^{m_n}X_{nm}-M_n-(\sum_{m=1}^{m_n}\bar{X}_{nm}-M_n)$$

であるから

$$P_r\{|\frac{1}{A_n}\sum_{m=1}^{m_n}\tilde{X}_{nm}|\geq\eta\}$$

$$\geq P_r\{\frac{1}{A_n}(\sum_{m=1}^{m_n}X_{nm}-M_n-\sum_{m=1}^{m_n}\bar{X}_{nm}+M_n)\geq\eta\cap\frac{1}{A_n}(\sum_{m=1}^{m_n}\bar{X}_{nm}-M_n)\geq 0\}+P_r\{\frac{1}{A_n}(\sum_{m=1}^{m_n}X_{nm}-M_n-\sum_{m=1}^{m_n}\bar{X}_{nm}+M_n)\leq\eta\cap\frac{1}{A_n}(\sum_{m=1}^{m_n}\bar{X}_{nm}-M_n)\leq 0\}$$

$$\geq\frac{1}{2}P_r\{\frac{1}{A_n}|\sum_{m=1}^{m_n}X_{nm}-M_n|\geq\eta\}$$

よって (4.1.1) は (4.1.4) と (4.1.5) より出る(証了)

A. Kolmogoroff*) によれば平均値

$$\sigma_n=\frac{X_{n1}+\cdots+X_{nm_n}}{m_n}$$

が安定であると云ふのは任意の $\eta>0$ に対し

$$P_r\{|\sigma_n-d_n|\geq\eta\}\longrightarrow 0,\quad(n\to\infty)$$

---

* A. Kolmogoroff, Über die Summen durch den Zufall bestimmter zuffälliger Grössen, Math. Annalen, 99, p.p. 309—319. 1928, 102, pp. 484—488, 1930

なる様な実数列 $\{\alpha_n \mid n=1,2,3\cdots\}$ の存在する事である。よって次の系が成立する

系 4.1.1

σ_n の安定のための必要且十分な条件わ

$$\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\psi_{F_{nm}}(m_n)\}\longrightarrow 0,\quad (n\to\infty)$$

§4.2 大数の法則の特殊な場合

最初に次の定理を考へよう

定理 4.2.1 任意の $\eta>0$ に対し

$$(4.2.1)\quad P_r\left\{\frac{1}{A_n}\left|\sum_{m=1}^{m_n}\left(X_{nm}-\int_{-A_n}^{A_n}x\,dF_{nm}(x)\right)\right|\geq\eta\right\}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

なる様な $\{A_n \mid n=1,2,\cdots\}$ が存在して且

$$(4.2.2)\quad P_r\left\{\left|\frac{1}{A_n}X_{nm}\right|\geq\eta\right\}\longrightarrow 0,\quad(n\to\infty)$$

が $1\leq m\leq m_n$ に対し一様に成立するための必要且十分な条件わ

$$(4.2.3)\quad \sum_{m=1}^{m_n}\{1-\phi_{F_{nm}}(A_n)\}\longrightarrow 0,\quad(n\to\infty)$$

証明 必要な事 簡単のため

$$a_{nm}=\int_{-A_n}^{A_n}x\,dF_{nm}(x)$$

とおく、仮定 (4.2.1) より

$$\prod_{m=1}^{m_n}f'_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)\longrightarrow 1,\quad(n\to\infty)$$

がどんな有限区間でも一様に成立する。ここに

$$f'_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)=f_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)e^{-it\frac{1}{A_n}a_{nm}}$$

である。故に

$$\prod_{m=1}^{m_n}\left|f_{nm}\left(\frac{t}{A_n}\right)\right|^2\longrightarrow 1,\quad(n\to\infty)$$

が上と同じ意味で成立する。従って $N_0>0$ が存在

して $\prod_{m=1}^{m_n} |f_{nm}(\frac{t}{A_n})|^2 \geq \frac{1}{2}$

が $n \geq N_0$ と $0 \leq t \leq 2$ に対して成立する。更に (4.2.2) より

$$f_{nm}(\frac{t}{A_n}) \longrightarrow 1, \quad (n \to \infty)$$

が、t の任意の有限区間と $m\ (1 \leq m \leq m_n)$ に対し一様に成立する。従って $n \geq N_0$ ならば $0 \leq t \leq 2$ に対し $R f_{nm}(\frac{t}{A_n}) \geq 1/2$ こ

が $1 \leq m \leq m_n$ に対し一様に成立する。故に (F.I.2) と (F.I.4) より $n \geq N_0 > 0$ に対し

$$\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\phi_{F_{nm}}(A_n)\} \leq R\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\psi_{F_{nm}}(A_n)\} \leq RK\{1-\psi_{F_{n1}*\cdots*F_{nm_n}}(A_n)\}$$

こゝに K と R が常数である。故に

$$1-\psi_{F_{n1}*\cdots*F_{nm_n}}(A_n) = \int_0^\infty e^{-t}(1-\prod_{m=1}^{m_n}|f_{nm}(\frac{t}{A_n})|^2)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

なることに注意すれば (4.2.3) は直ちに出る

<u>十分な事</u>　(4.2.2) は容易に次の不等式

$$\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\phi_{F_{nm}}(\eta A_n)\} \geq \frac{1}{2}P_r\{|X_{nm}| \geq \eta A_n\} \quad (\eta \text{ は任意の正数})$$

より出る。次に (F.I.7) より

$$\sum_{m=1}^{m_n}|f'_{nm}(\frac{t}{A_n})-1| \leq (t^2+2|t|+4)\sum_{m=1}^{m_n}\{1-\phi_{F_{nm}}(A_n)\}$$

故に

$$\left|\log\prod_{m=1}^{m_n}f'_{nm}(\frac{t}{A_n})-\sum_{m=1}^{m_n}(f'_{nm}(\frac{t}{A_n})-1)\right| \leq \sum_{m=1}^{m_n}|f'_{nm}(\frac{t}{A_n})-1|^2$$

が十分大きな n に対して成立しているから

$$\prod_{m=1}^{m_n}f'_{nm}(\frac{t}{A_n}) \equiv \prod_{m=1}^{m_n}f_{nm}(\frac{t}{A_n})e^{-it\frac{a_{nm}}{A_n}} \longrightarrow 1. \quad (n\to\infty)$$

が任意の有限区間で成立し、定理 4.2.1 の証明わ終る

同様にして次の定理を証明することができる

<u>定理 4.2.2</u>　$\|X_{nm}\|$ を X_{nm} の期望値 $E(X_{nm})$ が存在するならば $E(X_{nm})=0$ なる様な確率変数の集合とするならば任意の $\eta>0$ に対し

$$(4,2,4)\quad P_r\left\{\frac{1}{A_n}\left|\sum_{m=1}^{m_n}(X_{nm}-a_{nm})\right|\geq\eta\right\}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

なる様な $\{A_n\}$ が存在し且任意の $\eta>0$ に対し

$$P_r\{|X_{nm}|\geq\eta A_n\}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

が $1\leq m\leq m_n$ に対し一様に成立するための必要且十分な條件は

$$(4,2,3)\quad\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\varphi_{F_{nm}}(A_n)\right\}\to 0,\qquad(n\to\infty)$$

こゝに

$$a_{nm}=\begin{cases}0 & E(X_{nm})=0\text{ ならば}\\ \displaystyle\int_{|x|\leq A_n}x\,dF_{nm}(x) & \text{その他の場合}\end{cases}$$

である

<u>系 4.2.1</u>　$\|X_{nm}\|$ を全て $E(X_{nm})$ の存在する様な確率変数の集合とすれば，任意の $\eta>0$ に対し

$$P_r\left\{\frac{1}{m_n}\left|\sum_{m=1}^{m_n}(X_{nm}-E(X_{nm}))\right|\geq\eta\right\}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

が成立し且

$$P_r\{|X_{nm}|\geq\eta m_n\}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

が $1\leq m\leq m_n$ に対し一様に成立するための必要且十分な條件は

$$\sum_{m=1}^{m_n}\left\{1-\varphi_{F_{nm}}(m_n)\right\}\to 0\quad(n\to\infty)$$

の成立するわけである。

（つづく）