實驗計画法ニ於ケル缺測値推定法ニ就テ (I)

兼任所員　増山元三郎

§1. 實驗計画法ニ現レル二次形式

実驗計画法ノ分野デ綺麗ニ解ケテ井ナイ問題ニ缺測値推定法ノ問題ガアル。乱塊法及ビラテン方格法ノ場合ニ唯一ツノ缺測値ヲ誤差変動項ヲ最小ナラシメル如ク推定シテ検定スル方法ガ用ヒラレテ井ルガ例ヘバ G.W. Snedecor: Statistical Methods, 1940. 又ハ D.D. Paterson: Statistical Technique in Agricultural Research, 1939. ヲ見ルト完全デハナイ。原著ヲ見ル機会ガナイノデ、ドノ程度コノ方面ノ研究ガ行ハレテ井ルノカ分ラナイガ、時局柄缺測値ヲ生ズルコトガ少クナイノデ、コノ問題ニ就イテ次ノ様ニ考ヘテ見タ。

実驗計画法ニ現レル変動——偏差方和ヲサウ呼ビタイ——ハ、一般ニ観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ ノ非負二次形式デアル。之ヲ

$$(1.1)\qquad \beta_A \equiv \sum\sum A_{ij} x_i x_j \qquad (A_{ij}=A_{ji})$$

ト表ザウ。ラテン文字ハ観測番号ヲ表シ、Σハ繰返サレタラテン文字ニ関シ1カラ

N迄加ヘルコトヲ束スモノト約束スル
　$x_1, x_2, \cdots, x_N$ハ夫々母平均0、母分散1ノ正規母集團ニ属シ相互ニ獨立デアルトシテモ、之迄實際使カレテヰル場合ハ總テ含マレル。是ハ眞差デナク偏差ガ問題ニナルノデ、x_iノ代リニ

(1.2)　　$y_i = x_i + a$　(aハ任意ノ常数)

ヲ用ヒテモQ_Aノ値ハ変ラズ、最後ノ検定ハ不偏分散ノ比ヲ採ッテ行ハレルカラx_iノ代リニ、

(1.3)　　$z_i = bx_i$　(bハ零デナイ任意ノ常数)

ヲ用ヒテモ、本質的ナ差ハナイカラデアル。
　スルト(1.2)ノ條件カラ

(1.4)　　$$\sum_{i=1}^{N} A_{ij} = 0,\quad \sum_{j=1}^{N} A_{ij} = 0$$

ガ得ラレル。
　實驗問題ニナル二次形式Q_Aハ更ニ特別ナモノデアッテ、Q_Aノ標本分布ハχ^2-分布則ニ從ッテヰル。之ニ(1.3)ノ條件ニ基ク母分散1ノ仮定ヲ加ヘルト、坂元ノ定理ニ依リ

(1.5)　　$$\sum A_{ij} \cdot A_{jk} = A_{ik}.$$

　實際ノ實驗計画法ニ現レル二次形式ハソノ型ニ依リ更ニ特殊ナ條件ヲ滿シテヰルガ、茲デハ差当ッテ(1.5)ヲ基ニ調ベテ行カウ。

§2. 二ツノ二次形式ト一方ヲ最小ナラシメル推定値

例ヘバ乱塊法ノ場合ヲ採ルト観測値 x_{ij} ガ，要因 R_i ダケデ定マル α_i ト，要因 C_j ダケデ定マル β_j ト残リハ母平均 0，母分散 σ^2 ノ正規分布ヲスル部分 z_{ij} トカラ相加的ニ作ラレテ居ルト看做シテ居ル。即チ

(2·1). $x_{ij}=\alpha_i+\beta_j+z_{ij}$．　$i=1,2,\cdots,r$;
$j=1,2,\cdots,c$

偏差ガ問題ダカラ $\sum_{j=1}^{c}\beta_j=0$ トシテモ一般性ハ失ハレナイ。rc 箇ノ観測値 x_{ij} ヲ基ニ，α_i，β_j，σ^2 ヲ最大法デ推定スルト，二次形式

(2·2) $$Q=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}z_{ij}$$

ハ $\hat{\alpha}_i=\bar{x}_{i\cdot}$，$\hat{\beta}_j=\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x}$，$\hat{\sigma}^2=\hat{Q}/(rc)$ ノ時最小トナリ，コノ時

(2·3) $$\hat{Q}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$$

何レモ推定値ニ"ヘ"ヲツケテ表シテアル。コノ $\hat{Q}$ ハ一般ニハ要因 R ト要因 C トノ交互作用項 $S_{R\times C}$ デアルガ，コノ場合ハ残差平方和即チ誤差変動ヲ表ス。拙著「小数例ノ纏メ方ト実験計画ノ立テ方」95頁以下参照。

コノ性質ヲ利用シ，欠測値ガアッタ場合 $\hat{Q}$ ノ表式ガ最小ニナル様ナ値ヲ推定値

トシテ採ラウトスルノガ乱塊法デ現在用[(a)]
井ラレテ井ル方法デアル。一般ヘ戻ラウ。
試測値ガ x_i 一ツノ場合ヲ考ヘ次ノ三ツノ
二次形式ヲ考ヘル。

(2.4) $\qquad \theta_A = \sum\sum A_{ij}\, x_i x_j$, $\quad \theta_B \equiv \sum\sum B_{ij} x_i x_j$,

$\theta_C \equiv \sum\sum C_{ij}\, x_i x_j$

之等ハ相互ニ独立デアルトスレバ、坂元
ノ定理カラ、

(2.5) $\qquad \sum A_{ij}\, B_{jk} = 0, \quad \sum B_{ij}\, C_{jk} = 0.$

以下考ヘル問題ハ θ_B ヲ最小ナラシメル x_i
ノ推定値 ξ ヲ夫々 θ_A / θ_B / θ_C ニ代入シテ
得ラレル二次形式 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ ガ (i) 相互ニ
独立デアル為ノ必充條件 (ii) χ^2－分布ヲス
ル為ノ必充條件 (iii) χ^2－分布ヲスル場合ノ
自由度ノ変化デアル。 観測番号ニ就テ
2 カラ N 迄ノ和ハ繰返サレタギリシヤ文
字及ビ和記号 S デ表スコトニスレバ

(2.6) $\qquad \theta_B = $ 最小

ノ條件カラ直チニ

(2.7) $\qquad B_{11}\xi + S\, B_{1\alpha} x_\alpha = 0.$

$B_{11} \neq 0$ ト假定スレバ

(2.8) $\qquad \theta_A = S S\, \bar{A}_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta + A_{11} x_1^2 + 2 x_1$

$S A_{1\alpha} x_\alpha$

従ツテ之ニ(2.7)ヲ代入スレバ

(2.9) $\wp_A = SS(A_{\alpha\beta} + A_{11}B_{1\beta}/B_{11}^2 - 2A_{1\alpha}A_{1\beta}/B_{11})x_\alpha x_\beta$

特ニ $A = B$ ナラ

(2.10) $\wp_B = SS(B_{\alpha\beta} - B_{1\alpha}B_{1\beta}/B_{11})x_\alpha x_\beta$

§3. 独立性

先ヅ$\wp_A$ト$\wp_B$トノ独立性ヲ調ベヨウ。坂元ノ定理ニ依レバ、両者ガ相互ニ独立デアル爲ノ必充條件ハ

(3.1) $Q_{\alpha\gamma} \equiv S(A_{\alpha\beta}B_{11}^2 + A_{11}B_{1\alpha}B_{1\beta} - 2B_{1\alpha}A_{1\beta}B_{11})(B_{\beta\gamma}B_{11} - B_{1\beta}B_{1\gamma})$

ガ恒等的ニ零ニ等シイコトデアル。$Q_{\alpha\gamma}$ヲ(2.5)ヲ変形シテ

(3.2) $SB_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} + B_{\alpha1}B_{1\gamma} = B_{\alpha\gamma}$

ヲ用ヰテ書キ直スト、コノ條件ハ恒等式ニ満タサレテヰルコトガ分ル。同様ニシテ$\wp_B$ト$\wp_C$トモ相互ニ独立デアル。

$\wp_A$ト$\wp_C$トハドウカ？コノ場合ニハ

$$P_{\alpha\gamma} \equiv S(A_{\alpha\beta}B_{11} + A_{11}B_{1\alpha}B_{1\beta} - 2B_{1\alpha}A_{1\beta}B_{11})(C_{\beta\gamma}B_{11}^2 + C_{11}B_{1\beta}B_{1\gamma} - 2B_{1\beta}C_{1\gamma}B_{11})B_{11}^3 + A_{11}B_{1\alpha}B_{1\gamma}C_{11}B_{11}^2 + A_{11}B_{1\alpha}B_{11}(B_{1\gamma}C_{11} - 2B_{11}C_{1\gamma}).$$

更ニ特殊ナ條件ヲ加ヘヌ限リ之以上簡単(6)ニハナラナイ。即チ φ_C トハ一般ニ独立デハナクナル。

§4. χ^2 分布

簡単ナ φ_B カラ調ベヨウ。坂元ノ定理ヲカラ φ_B ガ χ^2 分布ヲスル必充條件ハ(1.5)型ノ式ノ成立ツコトデアル。

$$K_{\alpha\gamma} \equiv S(B_{\alpha\beta} - B_{1\alpha}B_{1\beta}/B_{11})(B_{\beta\gamma} - B_{1\beta}B_{1\gamma}/B_{11})$$

ヲ(3.3)式ヲ用ヰテ変形スルト

$$K_{\alpha\gamma} = B_{\alpha\gamma} - B_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11}.$$

即チ φ_B ハ χ^2 分布ヲスルコトガ分ル。

φ_B ノ自由度ハドウカ? θ_B ノ自由度ヲ f トシヨウ。§1デノ假定ニ依リ $E(x_ix_j) = \delta_{ij}$. 故ニ

$$E(\theta_B) = \Sigma\Sigma B_{ij}E(x_ix_j) = \Sigma B_{ii} = f.$$

$$E(\varphi_B) = SS(B_{\alpha\beta} - B_{1\alpha}B_{1\beta}/B_{11})E(x_\alpha x_\beta)$$
$$= S(B_{\alpha\alpha} - B_{1\alpha}^2/B_{11}) = \Sigma B_{ii} - B_{11} - SB_{1\alpha}^2/B_{11}$$

然ルニ(3.3)ヨリ

$$SB_{1\alpha}B_{\alpha 1} + B_{11}^2 = B_{11}.$$

故ニ

$$E(\varphi_B) = \Sigma B_{ii} - 1 = f - 1$$

即チ φ_B ノ自由度ハ θ_B ノ夫ヨリ1少ナイ。

(7) φ_A ハ χ^2-分布ヲスルノデアラウカ?

$\mathbb{W}_{\alpha\gamma} \equiv S(A_{\alpha\beta} + A_{11}B_{1\alpha}B_{1\beta}/B_{11}^2 - 2A_{1\beta}B_{1\alpha}/B_{11})$
$(A_{\beta\gamma} + A_{11}B_{1\beta}B_{1\gamma}/B_{11}^2 - 2A_{1\gamma}B_{1\beta}/B_{11})$

トオキ (2.5)(1.5) ヲ利用シテ変形スルト

$\mathbb{W}_{\alpha\gamma} = (A_{\alpha\gamma} + A_{11}B_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11}^2 - 2A_{1\alpha}B_{1\alpha}/B_{11})$
$+ (A_{1\alpha}A_{1\gamma} - A_{11}A_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11} + A_{11}A_{1\gamma}B_{1\alpha}/B_{11}$
$+ A_{11}^2 B_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11}^2 - 2A_{11}A_{1\gamma}B_{1\alpha}/B_{11}^2 - A_{11}B_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11}^2$
$+ A_{11}^2 B_{1\alpha}B_{1\gamma}/B_{11}^3)$

即チ更ニ特殊ナ條件ノナイ限リ φ_A ハ χ^2-分布ヲスルトハイヘナイ。

§5 結ビ

現在用ヒラレテヰル方法ハ一般ニ以上ノ様ナ欠点ヲ持ッテヰル。之ヲ改メル一ツノ方法ハ x_1 ヲ推定スルノニ ξ ヲ $x_2, \cdots x_N$ ノ一次形式ト考ヘ未定係数ヲ θ_A θ_B θ_C ニ ξ ヲ代入シテ得ラレル Ψ_A Ψ_B Ψ_C ガ相互ニ独立ニナル様ニ出来ルナラ χ^2-分布ニナル様ニスル方法デアラウ。
未定係数ニツイテ一般ニ四次聯立方程式ガ現レルノデソノ様ナ解ガ一般ニ存在スルカ否カ簡単ニハ分ラナイ。